

ARANDI GINANE BEZERRA JUNIOR

**TEORIA CINÉTICA PARA MISTURAS  
DE GASES NEUTROS E IONIZADOS  
– UM MÉTODO ALTERNATIVO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA

1993



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

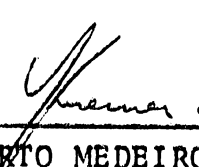
ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. ARANDI GINANE BEZERRA JUNIOR

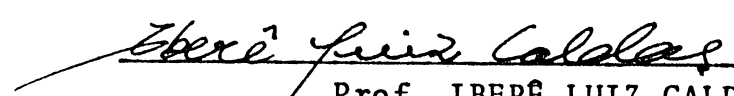
TÍTULO DA TESE: "Teoria Cinética para Misturas de Gases Neutros e Ionizados - Um Método Alternativo"

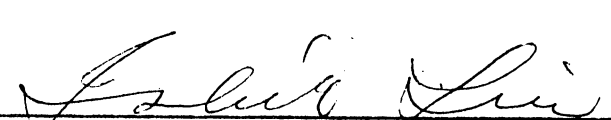
Em sessão pública de defesa de tese, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir o Conceito A.

Curitiba, 10 de dezembro de 1993.

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER  
Presidente/Orientador  
Depto. de Física/UFPR

  
\_\_\_\_\_  
Prof. IBERÊ LUIZ CALDAS  
Instituto de Física/USP

  
\_\_\_\_\_  
Prof. I-SHIH LIU  
Instituto de Matemática/UFRJ

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador por sua dedicação e exemplo de profissionalismo.

Aos meus pais e irmão pelo incentivo.

Aos amigos da Universidade e do Cefet pelo apoio.

À Jose pela torcida.

Ao Marcos, grande amigo, pelas conversas e por seu companheirismo.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Dedico este trabalho à Stella

## RESUMO

É desenvolvida neste trabalho uma teoria cinética para uma mistura de gases monoatômicos baseada num método alternativo que combina características dos métodos de Chapman-Enskog e Grad, simplificando-os. A partir dele são obtidas as equações constitutivas (leis de Fick, Navier-Stokes e Fourier) para uma teoria linearizada juntamente com aproximações sucessivas para os coeficientes de transporte. O método é aplicado primeiramente para uma mistura de gases neutros e em seguida para uma mistura de gases ionizados. Em ambos os casos são verificadas as relações de reciprocidade de Onsager.

## ABSTRACT

Based on an alternative method that combines and simplifies the features of the Chapman-Enskog and the Grad methods, a kinetic theory for monatomic gas mixtures is developed. The constitutive equations (laws of Fick, Navier-Stokes and Fourier) and the successive approximations to the transport coefficients are obtained for a linearized theory. Neutral gas mixtures and ionized gas mixtures are analyzed within the framework of this method. In both cases the Onsager reciprocal relations are verified.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>01</b>
<b>2 FUNDAMENTOS DA TEORIA CINÉTICA</b>	<b>04</b>
2.1) A ESTRUTURA MOLECULAR DE UM GÁS .....	04
2.2) DINÂMICA DA COLISÃO BINÁRIA .....	06
2.3) A EQUAÇÃO DE BOLTZMANN .....	08
2.4) DESCRIÇÃO MACROSCÓPICA DE UM GÁS .....	15
2.5) A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE .....	20
2.6) TEORIA CINÉTICA COM $5\nu$ CAMPOS ESCALARES .....	22
2.7) TEORIA CINÉTICA COM $\nu + 4$ CAMPOS ESCALARES .....	24
<b>3 O MÉTODO ALTERNATIVO</b>	<b>26</b>
3.1) O MÉTODO DE CHAPMAN-ENSKOG .....	26
3.2) O MÉTODO DE GRAD .....	31
3.3) O MÉTODO ALTERNATIVO .....	33
3.4) APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS PARA OS COEFICIENTES DE TRANSPORTE .....	36
<b>4 O MÉTODO ALTERNATIVO PARA MISTURAS</b>	<b>39</b>
4.1) PRIMEIRA APROXIMAÇÃO PARA OS COEFICIENTES DE TRANSPORTE .....	39
4.2) GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO ALTERNATIVO .....	47
<b>5 O MÉTODO ALTERNATIVO PARA GASES IONIZADOS</b>	<b>53</b>
<b>6 CONCLUSÃO</b>	<b>65</b>
<b>APÊNDICE A - CÁLCULO DAS INTEGRAIS <math>A_{\alpha\beta}</math>, <math>F_{\alpha\beta}</math>, <math>H_{\alpha\beta}</math> e <math>K_{\alpha\beta}</math></b> .....	<b>66</b>
<b>APÊNDICE B - CÁLCULO DO TENSOR <math>(S^{-1})_{ij}</math></b> .....	<b>69</b>
<b>APÊNDICE C - CÁLCULO DO TENSOR <math>A_{ijpr}</math></b> .....	<b>70</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>71</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os fundadores da teoria cinética dos gases, como Maxwell (1831- 1879) e Boltzmann (1844-1906), eram ambiciosos e entusiastas ao tentar explicar os fenômenos da termodinâmica e da dinâmica dos gases baseados na hipótese que um gás é constituído de um grande número de pequenas partículas, cada uma se comportando de acordo com leis mecânicas precisas (as leis de Newton).

O objetivo da teoria cinética dos gases é obter leis para os fenômenos macroscópicos a partir de hipóteses sobre a estrutura microscópica de um sistema que é considerado como sendo composto, em geral, por átomos e moléculas. Contudo, mesmo sendo possível conhecer leis de força que atuam sobre cada partícula, é necessário o desenvolvimento de uma teoria estatística tendo em vista o enorme número de equações simultâneas (associadas ao grande número de partículas).

Ainda no século XIX, foi estabelecida a base da dinâmica dos gases a partir de um conjunto de equações de balanço (de massa, momento linear e energia) e das equações constitutivas (leis de Fick, Navier-Stokes e Fourier), que eram derivadas considerando o gás como sendo um meio contínuo. Com o progresso da teoria cinética, tornou-se possível obtê-las a partir de um conjunto completo de equações de movimento (leis de Newton) das partículas que constituem um gás sob certas condições, que equivale ao uso da equação de Liouville.

A equação fundamental da teoria cinética é a equação de Boltzmann, a partir da qual podem ser obtidas as equações de balanço e as leis de Fick, Navier-Stokes e Fourier. Ela foi proposta em 1872 e é uma equação íntegro-diferencial que deve ser satisfeita, em geral, pela função de distribuição das velocidades do gás. Por volta de 1916 Chapman, baseado no trabalho de Maxwell, obteve os coeficientes de viscosidade



e condutividade térmica em termos da razão entre dois determinantes infinitos. No ano seguinte, tomando como base os trabalhos de Hilbert sobre aproximações sucessivas para a função de distribuição, Enskog conseguiu determinar os coeficientes de transporte para gases puros e misturas, além da própria função de distribuição a partir da equação de Boltzmann. Os resultados obtidos por Chapman e Enskog foram rigorosamente iguais [1].

Em 1949 Grad [2] expressou a função de distribuição através de uma expansão em velocidades, a partir dos polinômios de Hermite, caracterizando um gás monoatômico através de 20 campos escalares conhecidos por momentos da função de distribuição. Desta forma, Grad obteve a primeira aproximação para os coeficientes de viscosidade e condutividade térmica calculados anteriormente por Chapman e Enskog. Nas referências [3] e [4] são obtidas aproximações sucessivas para os coeficientes de transporte para um gás monoatômico.

Na referência [3] é demonstrada a equivalência entre os métodos de Grad e Chapman-Enskog com respeito a aproximações sucessivas dos coeficientes de transporte e baseado nestes dois métodos foi proposto um terceiro, o "método alternativo", que combina características dos dois métodos já citados de tal forma que nem a solução da equação integral (necessária no método de Chapman-Enskog), nem as equações de campo dos momentos (necessárias no método de Grad) são utilizadas [5].

É com base no método alternativo que se desenvolve o presente trabalho o qual objetiva determinar os coeficientes de transporte num primeiro momento para uma mistura de gases monoatômicos e depois para um gás completamente ionizado. Serão verificadas também as relações de reciprocidade de Onsager.

São utilizadas no trabalho a notação cartesiana para tensores e a convenção de soma de Einstein, juntamente com a seguinte definição: parênteses pontiagudos

em torno dos índices representam a parte simétrica dos tensores em relação aos mesmos sem traço:

$$t_{<ij>} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) - \frac{1}{3}t_{rr}\delta_{ij}$$

## 2 FUNDAMENTOS DA TEORIA CINÉTICA

### 2.1) A ESTRUTURA MOLECULAR DE UM GÁS

Os gases considerados rarefeitos são constituídos de um grande número de partículas, separadas por grandes distâncias em relação aos seus diâmetros, que na maior parte do tempo se movem independentemente através do volume que as contém. Este movimento livre é interrompido brevemente quando ocorrem choques entre as partículas e destas com as paredes do recipiente onde estão contidas. O tempo de duração dessas colisões pode ser considerado desprezível se comparado com o intervalo de tempo entre as colisões. Gases com estas características, em teoria cinética, podem ser tratados como gases ideais.

Considere-se um gás ideal constituído de partículas que, por sua vez, serão caracterizadas por esferas rígidas de diâmetro  $a$  (da ordem de  $2$  a  $3 \times 10^{-10}$  m). Sob condições normais de temperatura e pressão ( $T = 273,15\text{K}$  e  $P = 1\text{atm}$ ), um mol desse gás ocupa um volume de  $2,24 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  e contém  $6,022 \times 10^{23}$  átomos ou moléculas. Dividindo o volume de um mol pelo número de partículas encontra-se o volume ocupado por apenas uma partícula:  $3,72 \times 10^{-26} \text{ m}^3$ ; considerando esse volume como o volume de um cubo, cada aresta terá  $3,34 \times 10^{-9}$  m, logo, a distância média entre os centros de duas partículas vizinhas pode ser considerada igual a este valor, que equivale a cerca de dez vezes um diâmetro molecular.

Dada uma partícula teste que se move com uma velocidade relativa média  $\bar{g}$ , o volume descrito por seu deslocamento é  $\pi a^2 \bar{g}$  e o número médio de colisões entre pares de partículas é denominado *frequência de colisão* ( $\nu'$ ):

$$\nu' = n\pi a^2 \bar{g},$$

onde  $n$  é a densidade do número de partículas do gás. Sendo assim, o tempo médio entre colisões sucessivas pode ser expresso por :

$$\tau = \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{n\pi a^2 \bar{g}} .$$

Este tempo médio, para gases ideais, é da ordem de mil vezes o tempo de duração da colisão ( $\tau_c$ ), definido como sendo diretamente proporcional ao alcance efetivo das forças intermoleculares (que, por sua vez, é considerado proporcional ao diâmetro  $a$  das partículas) e inversamente proporcional à velocidade relativa média da partícula teste

$$\tau_c \sim \frac{a}{\bar{g}} .$$

Cada partícula percorre entre cada colisão um espaço definido como *livre caminho médio* ( $l$ ) que equivale ao produto do tempo entre duas colisões e a velocidade média da partícula ( $\bar{v}$ ):

$$l = \bar{v}\tau .$$

Quanto às colisões, os resultados experimentais indicam que a grandes distâncias, quando comparadas com suas dimensões, as partículas exercem uma fraca força de atração sobre as outras, enquanto que a distâncias da ordem do diâmetro molecular elas se repelem violentamente. Existem diversos modelos empíricos que descrevem potenciais de interação cuja aplicabilidade depende do problema em questão. Pode-se destacar os potenciais : *de esfera rígida; de centros de repulsão; do poço quadrado; de Shuterland; e de Lennard- Jones.*

Para que seja possível a aplicação da mecânica newtoniana, é necessário assegurar que os efeitos relativísticos e quânticos podem ser desprezados. Isto será verdadeiro sempre que a velocidade térmica média de uma partícula for muito menor que a velocidade da luz no vácuo e ainda se o comprimento de onda de de Broglie de uma

partícula for muito menor que a distância média entre as partículas. Em geral, gases constituídos de partículas neutras a pressões até a ordem de 100 atmosferas podem ser considerados gases ideais, pois a probabilidade de ocorrência de colisões ternárias (colisões entre três partículas) é pequena em comparação com as colisões binárias. Quanto à temperatura, gases sujeitos a temperaturas entre 50K e 100000K podem ser tratados como gases clássicos ideais, pois neste intervalo nem os efeitos quânticos nem os relativísticos são importantes. Cabe aqui observar que os limites acima não são fixos devendo ainda o gás satisfazer a equação térmica de estado que relaciona pressão, temperatura e densidade do número de partículas:

$$p = nkT,$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann.

Um dos objetivos da teoria cinética é a determinação de uma função , a função de distribuição , que expressa as características médias do conjunto de partículas. Será mostrado que a função distribuição deve satisfazer à equação de Boltzmann que descreve, por sua vez, o comportamento dos gases em consideração . A equação de Boltzmann, que é integro-diferencial, possui um termo dito *termo de colisão* que pode ser determinado a partir do conhecimento da dinâmica das colisões binárias. Na sequência será possível obter a equação de transporte.

## 2.2) DINÂMICA DA COLISÃO BINÁRIA

Na mistura de gases monoatômicos que será analisada, podem ocorrer colisões binárias tão somente entre partículas monoatômicas. No caso do potencial de esfera rígida, por exemplo, e supondo que a força exercida por uma partícula sobre outra com a qual colide é dirigida ao longo da linha que une seus centros, ficará especificada a colisão binária a partir da determinação das velocidades finais das partículas que colidem em função de suas respectivas velocidades iniciais. Supondo que quaisquer forças externas

sejam pequenas quando comparadas àquelas que tomam lugar quando da colisão, de tal forma que seus efeitos podem ser desprezados, encontra-se as relações entre as velocidades pré- e pós-colisionais.

Denota-se por  $(\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{c}_\beta)$  as velocidades assintóticas pré-colisionais e por  $(\mathbf{c}'_\alpha, \mathbf{c}'_\beta)$  as velocidades assintóticas pós-colisionais de duas partículas  $\alpha$  e  $\beta$ . Sejam  $m_\alpha$  e  $m_\beta$  suas massas e  $\mathbf{g}_{\beta\alpha}$  e  $\mathbf{g}'_{\beta\alpha}$  suas velocidades relativas assintóticas pré e pós-colisionais, respectivamente, definidas por:

$$\mathbf{g}_{\beta\alpha} = \mathbf{c}_\beta - \mathbf{c}_\alpha, \quad \mathbf{g}'_{\beta\alpha} = \mathbf{c}'_\beta - \mathbf{c}'_\alpha. \quad (2.2.1)$$

Na figura 1,  $\mathbf{k}_{\beta\alpha}$  é um vetor que bissecta o ângulo formado pelas velocidades relativas, denominado de vetor de colisão ou apsidal:

$$\mathbf{k}_{\beta\alpha} = \frac{\mathbf{g}_{\beta\alpha} - \mathbf{g}'_{\beta\alpha}}{|\mathbf{g}_{\beta\alpha} - \mathbf{g}'_{\beta\alpha}|}. \quad (2.2.2)$$

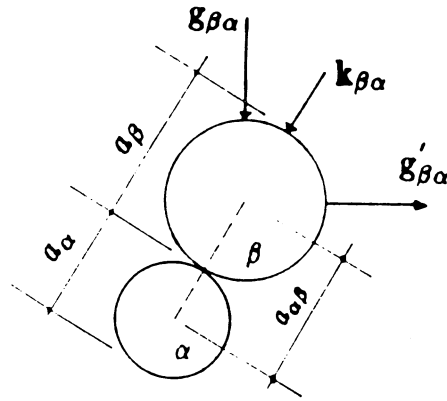


FIGURA 1: Colisão entre duas partículas.

Com base nas leis de conservação do momento linear e da energia, as seguintes relações são válidas, respectivamente:

$$m_\alpha \mathbf{c}_\alpha + m_\beta \mathbf{c}_\beta = m_\alpha \mathbf{c}'_\alpha + m_\beta \mathbf{c}'_\beta, \quad (2.2.3)$$

$$g_{\beta\alpha} = g'_{\beta\alpha}. \quad (2.2.4)$$

Como os módulos das velocidades relativas são iguais e  $\mathbf{k}_{\beta\alpha}$  bissecta estas velocidades, então é possível escrever :

$$\mathbf{g}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{k}_{\beta\alpha} = -\mathbf{g}'_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{k}_{\beta\alpha} = \mathbf{g}'_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{k}'_{\beta\alpha} \quad (2.2.5)$$

e ainda

$$\mathbf{g}'_{\beta\alpha} - \mathbf{g}_{\beta\alpha} = -2\mathbf{k}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha}). \quad (2.2.6)$$

Combinando a equação acima com a lei da conservação do momento linear, equação (2.2.3), obtêm-se as velocidades finais em função das velocidades iniciais :

$$\mathbf{c}'_{\beta} = \mathbf{c}_{\beta} - \frac{2m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \mathbf{k}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha}), \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{c}'_{\alpha} = \mathbf{c}_{\alpha} + \frac{2m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \mathbf{k}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha}). \quad (2.2.8)$$

Neste caso, para qualquer colisão direta com velocidades iniciais  $(\mathbf{c}_{\alpha}, \mathbf{c}_{\beta})$ , velocidades finais  $(\mathbf{c}'_{\alpha}, \mathbf{c}'_{\beta})$  e vetor de colisão  $\mathbf{k}_{\beta\alpha}$ , há sempre uma colisão inversa com velocidades iniciais  $(\mathbf{c}'_{\alpha}, \mathbf{c}'_{\beta})$ , velocidades finais  $(\mathbf{c}_{\alpha}, \mathbf{c}_{\beta})$  e vetor de colisão  $-\mathbf{k}_{\beta\alpha}$ .

### 2.3) A EQUAÇÃO DE BOLTZMANN PARA UMA MISTURA DE GASES MONOATÔMICOS

As propriedades macroscópicas de um gás podem ser determinadas através do conhecimento da função de distribuição . Uma partícula do gás pode ser especificada através de um ponto num espaço de seis dimensões (o espaço  $\mu$ ) determinado pelas três coordenadas de posição e pelas três coordenadas de velocidade; neste espaço um sistema de  $N$  partículas será representado por  $N$  pontos com coordenadas  $(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ . Desta forma,

uma mistura de  $\nu$  gases monoatômicos é caracterizada por uma função de distribuição ,  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t)$  com  $\alpha = 1, 2, \dots, \nu$  , de tal modo que

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha$$

representa o número de partículas do constituinte  $\alpha$  que, no instante  $t$ , situam-se com coordenadas de posição no elemento de volume entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  e com velocidades entre  $\mathbf{c}_\alpha$  e  $\mathbf{c}_\alpha + d\mathbf{c}_\alpha$ .

Considera-se que cada partícula do gás esteja sujeita a uma força externa resultante específica (força por unidade de massa)  $\mathbf{F}_\alpha$ , que neste primeiro momento não depende da velocidade das partículas.

Após um intervalo de tempo  $\Delta t$  a posição e a velocidade da partícula serão alteradas para  $\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t$  e  $\mathbf{c}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha \Delta t$ . Desta forma, o número de partículas que ocupam agora o elemento de volume entre  $(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t)$  e  $(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t) + d\mathbf{x}$  com velocidades entre  $(\mathbf{c}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha \Delta t)$  e  $(\mathbf{c}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha \Delta t) + d\mathbf{c}_\alpha$  , no intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \Delta t$  é :

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, \mathbf{c}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha.$$

Na ausência de colisões entre as partículas, estas movem-se de tal forma que é válida a seguinte relação :

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha = f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, \mathbf{c}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha. \quad (2.3.1)$$

Mas desde que ocorram colisões, nem todo o grupo de partículas deste elemento de volume considerado terá seu movimento dado pela equação acima, pois suas trajetórias serão desviadas e suas velocidades serão alteradas de tal forma que elas adentrarão outros elementos de volume. Em contrapartida, existirão outros grupos de partículas em outros elementos de volume que, também devido às colisões, serão somadas ao primeiro grupo. Para levar em conta esta variação da densidade do número de partículas devida



às colisões, supõe-se que o número de partículas do tipo  $\alpha$  que sai do elemento de volume aqui considerado, por causa das colisões com as partículas do tipo  $\beta$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , seja dado por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{-} d\mathbf{x} d\mathbf{c}_{\alpha} \Delta t,$$

onde  $\Gamma_{\alpha\beta}^{-}$  representa uma taxa de mudança da função de distribuição . Da mesma forma, o número de partículas do tipo  $\alpha$  que no intervalo de tempo  $\Delta t$  adentra o elemento de volume considerado, como resultado das colisões com as partículas do tipo  $\beta$ , é dado por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{+} d\mathbf{x} d\mathbf{c}_{\alpha} \Delta t.$$

Então, a equação do fluxo de pontos de fase para o caso em que ocorram colisões corresponde a:

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_{\alpha} - f_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{\alpha}\Delta t, \mathbf{c}_{\alpha} + \mathbf{F}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_{\alpha} \\ = \sum_{\beta=1}^{\nu} \left[ \Gamma_{\alpha\beta}^{+} - \Gamma_{\alpha\beta}^{-} \right] d\mathbf{x} d\mathbf{c}_{\alpha} \Delta t. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Dividindo a equação anterior por  $d\mathbf{x} d\mathbf{c}_{\alpha} \Delta t$  e passando ao limite quando  $\Delta t$  tende a zero, obtém-se a equação de Boltzmann:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + c_i^{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_i} + F_i^{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial c_i^{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \left[ \Gamma_{\alpha\beta}^{+} - \Gamma_{\alpha\beta}^{-} \right]. \quad (2.3.3)$$

A equação (2.3.3) descreve o comportamento dos pontos do espaço de fase através da variação da função de distribuição . O termo à direita da igualdade na equação de Boltzmann é chamado *termo de colisão*.

A equação de Boltzmann deve satisfazer às seguintes hipóteses [6]:

(i) Somente colisões entre pares de partículas (colisões binárias) são consideradas;

(ii) O efeito das forças externas que agem sobre as partículas durante a colisão é pequeno em comparação com as forças de interação mútua;

(iii) A variação da função de distribuição é pequena ao longo do tempo de duração de uma colisão, bem como ao longo de uma distância da ordem do alcance das forças intermoleculares;

(iv) Em quaisquer posição e tempo, as velocidades de duas partículas não estão correlacionadas. Esta suposição é conhecida como a *suposição do caos molecular*.

Para determinar o termo de colisão da equação de Boltzmann considera-se a colisão de duas partículas  $\alpha$  e  $\beta$  de massas  $m_\alpha$  e  $m_\beta$ , cujos diâmetros são  $a_\alpha$  e  $a_\beta$ . Suas velocidades iniciais são denotadas por  $\mathbf{c}_\alpha$  e  $\mathbf{c}_\beta$ , o vetor de colisão é  $\mathbf{k}_{\beta\alpha}$  e a velocidade relativa  $\mathbf{g}_{\beta\alpha}$ .

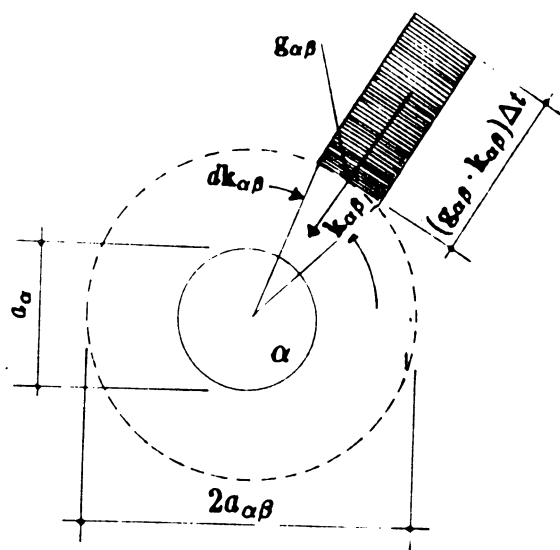


FIGURA 2: Geometria da colisão I.

Por ocasião da colisão, o centro da molécula  $\beta$  encontra-se a uma distância  $a_{\alpha\beta}$  do centro da molécula  $\alpha$ . Supõe-se que a molécula  $\beta$  esteja localizada na posição  $\mathbf{x}$ , com velocidade  $\mathbf{c}_\beta$  e que, em torno desta posição, as moléculas  $\alpha$  estejam com velocidades no intervalo entre  $\mathbf{c}_\alpha$  e  $\mathbf{c}_\alpha + d\mathbf{c}_\alpha$ . Em um intervalo de tempo  $\Delta t$  todas as partículas com velocidades  $\mathbf{c}_\beta$  que se encontrarem no interior do cilindro de colisão de volume

$a_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha})d\mathbf{k}_{\beta\alpha}\Delta t$ , podem ser assim representadas:

$$f_{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\beta}, t)d\mathbf{c}_{\beta}a_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha})d\mathbf{k}_{\beta\alpha}\Delta t.$$

Estas partículas colidirão com outras de velocidade  $\mathbf{c}_{\alpha}$  que, por sua vez, encontram-se no elemento de volume  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}_{\alpha}$ , representadas por :

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c}_{\alpha}.$$

Portanto, o número total de colisões que ocorrem no elemento de volume  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}_{\alpha}$  e intervalo de tempo  $\Delta t$  é:

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c}_{\alpha}f_{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\beta}, t)d\mathbf{c}_{\beta}a_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha})d\mathbf{k}_{\beta\alpha}\Delta t. \quad (2.3.4)$$

Dividindo a equação (2.3.4) por  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}_{\alpha}\Delta t$  e integrando sobre todas as componentes da velocidade  $(-\infty$  a  $+\infty)$  e sobre todas as direções de  $\mathbf{k}_{\beta\alpha}$ , que em coordenadas esféricas  $\theta_{\beta\alpha}$  e  $\epsilon$  \* possuem os limites  $0 \leq \theta_{\beta\alpha} \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq \epsilon \leq 2\pi$ , obtém-se a densidade do número de colisões por intervalo de tempo  $\Delta t$  que anula pontos no espaço de fase com velocidade  $\mathbf{c}_{\alpha}$  no elemento de volume  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}_{\alpha}$ :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{-} = \int f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\alpha}, t)f_{\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_{\beta}, t)a_{\alpha\beta}^2(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha})d\mathbf{k}_{\beta\alpha}d\mathbf{c}_{\beta}. \quad (2.3.5)$$

Analogamente ao procedimento acima, pode-se considerar a criação de pontos com velocidade  $\mathbf{c}_{\alpha}$  no elemento de volume  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}_{\alpha}$  como sendo resultante da colisão de partículas com velocidades iniciais  $\mathbf{c}'_{\alpha}$  e  $\mathbf{c}'_{\beta}$ , velocidades finais  $\mathbf{c}_{\alpha}$  e  $\mathbf{c}_{\beta}$  e direção do vetor de colisão  $\mathbf{k}'_{\beta\alpha} = -\mathbf{k}_{\beta\alpha}$ . Isto representa uma colisão inversa.

---

\*  $\theta_{\beta\alpha}$  é o ângulo entre  $\mathbf{k}_{\beta\alpha}$  e  $\mathbf{g}_{\beta\alpha}$ ;  $\epsilon$  é o ângulo entre o plano que contém  $\mathbf{k}_{\beta\alpha}$  e  $\mathbf{g}_{\beta\alpha}$  e um plano de referência. Assim é possível definir :  $d\mathbf{k}_{\beta\alpha} = \sin \theta_{\beta\alpha}d\theta_{\beta\alpha}d\epsilon$ .

Desta forma, a densidade do número de colisões por intervalo de tempo  $\Delta t$  que cria pontos no espaço de fase com velocidade  $\mathbf{c}_\alpha$  no elemento de volume  $d\mathbf{x}d\mathbf{c}_\alpha$  e no intervalo de tempo  $\Delta t$  vale:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^+ = \int f'_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_\alpha, t) f'_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_\beta, t) a_{\alpha\beta}^2(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha}) d\mathbf{k}_{\beta\alpha} d\mathbf{c}_\beta. \quad (2.3.6)$$

Na dedução da equação anterior foi também utilizada a relação

$$d\mathbf{c}_\beta d\mathbf{c}_\alpha = |J| d\mathbf{c}'_\beta d\mathbf{c}'_\alpha, \quad (2.3.7)$$

onde  $|J|$  é o módulo do jacobiano da transformação e assume o valor 1. Isto pode ser verificado a partir das equações que relacionam as velocidades pré e pós-colisionais, obtidas da análise da colisão binária, equações (2.2.7) e (2.2.8).

Para simplificar a notação, introduz-se as abreviações :

$$\begin{aligned} f_\alpha &= f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t), \\ f'_\alpha &= f'_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_\alpha, t), \\ f_\beta &= f_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\beta, t), \\ f'_\beta &= f'_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{c}'_\beta, t), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

e torna-se possível escrever a equação de Boltzmann em sua forma íntegro-diferencial:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) a_{\alpha\beta}^2(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha}) d\mathbf{k}_{\beta\alpha} d\mathbf{c}_\beta \quad (2.3.9)$$

ou, introduzindo os parâmetros de impacto  $b$  e  $\epsilon$  e o ângulo de espalhamento  $\chi_{\beta\alpha} = \pi - 2\theta_{\beta\alpha}$  (vide figura 3) de tal forma que

$$a_{\alpha\beta}^2(\mathbf{k}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta\alpha}) d\mathbf{k}_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha} b db d\epsilon, \quad (2.3.10)$$

então,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}_\beta, \quad (2.3.11)$$

ou

$$D_{\alpha}f_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} J(f_{\alpha}f_{\beta}), \quad (2.3.12)$$

onde  $D_{\alpha}$  representa as derivadas à esquerda da igualdade e  $J(f_{\alpha}f_{\beta})$  é o operador de colisão (integral à direita da igualdade). Esta equação descreve a variação da função de distribuição  $f_{\alpha}$  em um ponto fixo, devido às colisões entre as partículas e sua solução é relativamente complexa.

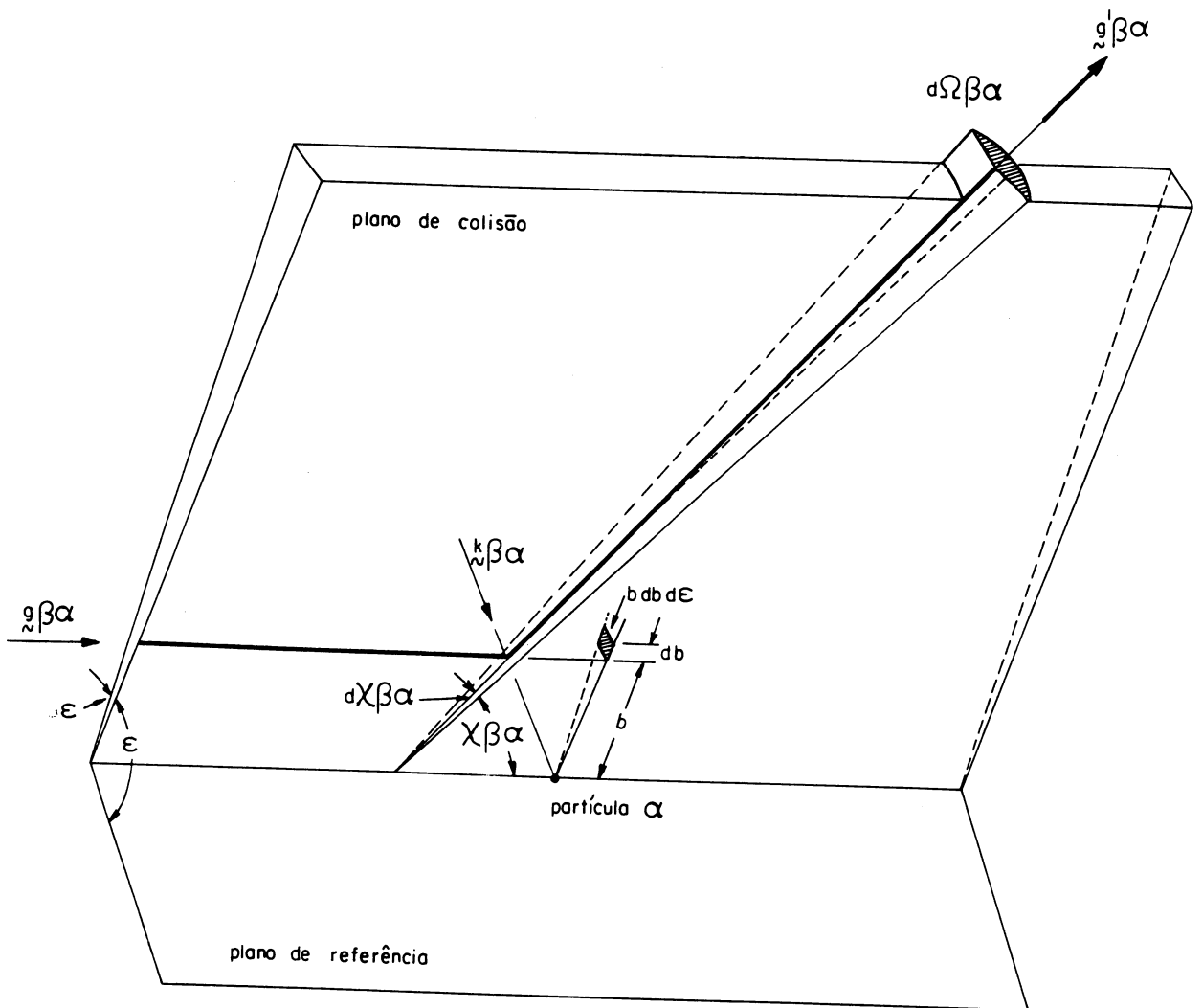


FIGURA 3: Geometria da colisão II.

## 2.4) DESCRIÇÃO MACROSCÓPICA DE UM GÁS

É possível determinar as propriedades macroscópicas de um gás a partir de seus valores microscópicos utilizando-se médias estatísticas (valores esperados) representados da seguinte maneira:

### a) DENSIDADE PARCIAL DE NÚMERO DE PARTÍCULAS

O número de partículas do constituinte  $\alpha$  por unidade de volume na posição  $\mathbf{x}$  e no tempo  $t$  é definido por

$$n_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \int f_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha}. \quad (2.4.1)$$

O número total de partículas por unidade de volume da mistura é determinado por

$$n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_{\alpha}. \quad (2.4.2)$$

### b) DENSIDADE PARCIAL DE MASSA

A densidade de massa de cada elemento da mistura pode ser expressa por

$$\rho_{\alpha} = \int m_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha}. \quad (2.4.3)$$

A densidade de massa total, por sua vez, é

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_{\alpha}. \quad (2.4.4)$$

### c) DENSIDADE DO MOMENTO LINEAR PARCIAL

Considerando o momento linear de uma partícula  $m_{\alpha} c_i^{\alpha}$ , então, a densidade de momento linear do constituinte  $\alpha$  é representada por

$$\rho_{\alpha} v_i^{\alpha} = \int m_{\alpha} c_i^{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{c}_{\alpha}, \quad (2.4.5)$$

onde  $v_i^\alpha$  é a velocidade linear do constituinte  $\alpha$ . A partir disto também é possível definir a velocidade peculiar parcial  $C_i^\alpha$  e a velocidade peculiar em relação à mistura  $\xi_i^\alpha$ , como sendo:

$$C_i^\alpha = c_i^\alpha - v_i^\alpha \quad (2.4.6)$$

e

$$\xi_i^\alpha = c_i^\alpha - v_i, \quad (2.4.7)$$

onde

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\rho_\alpha}{\rho} v_i^\alpha. \quad (2.4.8)$$

A diferença entre a velocidade do constituinte  $\alpha$  e a velocidade da mistura resulta na velocidade de difusão  $u_i^\alpha$ ,

$$u_i^\alpha = v_i^\alpha - v_i, \quad (2.4.9)$$

a partir da qual é possível definir o fluxo de difusão  $J_i^\alpha$ ,

$$J_i^\alpha = \rho_\alpha u_i^\alpha. \quad (2.4.10)$$

É fácil verificar das equações anteriores que vale a seguinte condição :

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} J_i^\alpha = 0, \quad (2.4.11)$$

mostrando que existem  $\nu - 1$  fluxos de difusão linearmente independentes.

#### d) *ENERGIA E TEMPERATURA*

A energia cinética de uma partícula pode ser expressa como  $\frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2$ , então, a densidade de energia  $\rho_\alpha u_\alpha$  do constituinte  $\alpha$  vale:

$$\rho_\alpha u_\alpha = \int m_\alpha \frac{c_\alpha^2}{2} f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha. \quad (2.4.12)$$

Substituindo a velocidade da partícula pela velocidade peculiar, equação (2.4.6), obtém-se:

$$\rho_\alpha u_\alpha = \frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 + \rho_\alpha \epsilon_\alpha, \quad (2.4.13)$$

onde

$$\rho_\alpha \epsilon_\alpha = \int m_\alpha \frac{C_\alpha^2}{2} f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha \quad (2.4.14)$$

é a densidade de energia interna do constituinte  $\alpha$ , haja vista o termo  $\frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2$  corresponder à densidade de energia cinética do constituinte  $\alpha$ .

No cálculo acima utilizou-se a relação

$$\int m_\alpha C_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha = 0. \quad (2.4.15)$$

Considerando o princípio da equipartição da energia e sabendo que o gás em questão é monoatômico (portanto há três graus de liberdade translacionais), a energia interna pode ainda ser escrita como

$$\epsilon_\alpha = \frac{3}{2} \frac{k T_\alpha}{m_\alpha}. \quad (2.4.16)$$

Combinando as equações (2.4.14) e (2.4.16) encontra-se a temperatura do constituinte  $\alpha$ :

$$T_\alpha = \frac{m_\alpha}{3k\rho_\alpha} \int m_\alpha C_\alpha^2 f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha. \quad (2.4.17)$$

Nos casos a serem estudados neste trabalho supõe-se que todos os constituintes estão a uma mesma temperatura  $T = T_\alpha$ .

### e) FLUXOS E MOMENTOS DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

O fluxo  $\Phi_\alpha$  de uma determinada propriedade molecular  $\phi_\alpha$  do constituinte  $\alpha$  equivale à passagem na unidade de tempo, através de uma superfície, desta propriedade que pode ser por exemplo a massa, o momento linear e a energia. Seja uma partícula



da espécie  $\alpha$ , com velocidade peculiar  $C_i^\alpha$ , em um intervalo de tempo  $dt$  entre duas colisões consecutivas passando através de uma superfície  $d^2S$  com um vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ . Esta partícula em movimento descreve um cilindro dado pela geratriz  $\mathbf{C}_\alpha dt$  e base  $d^2S$  cujo volume vale  $\mathbf{C}_\alpha \cdot \mathbf{n} d^2S dt$ . Este volume contém  $\mathbf{C}_\alpha \cdot \mathbf{n} d^2S dt f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha$  partículas  $\alpha$  com velocidades no elemento de volume em torno de  $\mathbf{C}_\alpha$ . Multiplicando este número de partículas pela quantidade  $\phi_\alpha$  transportada e integrando-se sobre as velocidades, conclui-se que o transporte da propriedade em questão é:

$$d^2S dt \mathbf{n} \cdot \Phi_\alpha = d^2S dt \mathbf{n} \cdot \int \phi_\alpha \mathbf{C}_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.4.18)$$

onde o vetor fluxo é escrito como:

$$\Phi_\alpha = \int \phi_\alpha \mathbf{C}_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha. \quad (2.4.19)$$

As observações feitas anteriormente são importantes para o entendimento dos chamados momentos da função de distribuição, definidos através de :

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n}^\alpha = \int m_\alpha C_{i_1}^\alpha C_{i_2}^\alpha \dots C_{i_n}^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha \quad (2.4.20)$$

O momento de ordem zero é a densidade parcial, enquanto que os momentos de primeira, segunda e terceira ordem estão associados ao transporte de massa, momento linear e energia, conforme é discutido na sequência.

### e.1) FLUXO DE MASSA

Quando a massa ( $\phi_\alpha = m_\alpha$ ) é a propriedade transportada pelas partículas  $\alpha$  relativamente à velocidade do próprio constituinte  $\alpha$ , o fluxo, de acordo com a equação (2.4.19) vale:

$$\Phi_\alpha = \int m_\alpha C_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha = 0. \quad (2.4.21)$$

## e.2) FLUXO DE MOMENTO LINEAR PARCIAL ou TENSOR PRESSÃO PARCIAL

O momento linear parcial transportado pelas partículas  $\alpha$ , é dado pela propriedade característica  $\phi_\alpha = m_\alpha \mathbf{C}_\alpha$ , o que implica no segundo momento:

$$p_{ij}^\alpha = m_\alpha \int C_i^\alpha C_j^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.4.22)$$

cujas componentes possuem os seguintes significados: os elementos da diagonal principal,  $p_{11}^\alpha$ ,  $p_{22}^\alpha$  e  $p_{33}^\alpha$ , representam a pressão normal do gás exercida em superfícies ortogonais às direções 1, 2 e 3 respectivamente; os elementos  $p_{ij}^\alpha$  com  $i \neq j$ , representam tensões cisalhantes. O negativo do tensor pressão é denominado tensor tensão ( $t_{ij}$ ), ou seja,  $t_{ij} = -p_{ij}$ . A pressão normal do constituinte  $\alpha$  do gás é definida como sendo o traço do tensor pressão dividido por três, isto é:

$$p^\alpha = \frac{1}{3} p_{ii}^\alpha = \frac{1}{3} \int m_\alpha C_\alpha^2 f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.4.23)$$

recordando que para um gás ideal a pressão é dada por  $p^\alpha = \frac{k}{m_\alpha} \rho_\alpha T$ .

Define-se ainda o deviante do tensor pressão,  $p_{<ij>}^\alpha$ , a partir do tensor sem traço:

$$p_{<ij>}^\alpha = p_{ij}^\alpha - \frac{1}{3} p_{rr}^\alpha \delta_{ij} \quad (2.4.24)$$

## e.3) FLUXO DE ENERGIA PARCIAL

A energia translacional de uma partícula  $\alpha$ , dada por  $\phi_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} C_\alpha^2$ , implica num fluxo que é identificado com o vetor fluxo de calor  $q_i^\alpha$ :

$$q_i^\alpha = \int \frac{m_\alpha}{2} C_\alpha^2 C_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.4.25)$$

que é o momento de terceira ordem contraído.

Os fluxos mencionados anteriormente tornam-se conhecidos a partir da função de distribuição parcial. Os fluxos da mistura serão definidos na sequência, a partir da equação de transporte, para permitir maior clareza dos termos envolvidos.

## 2.5) A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

A equação de balanço de qualquer propriedade do gás pode ser obtida a partir da equação de Boltzmann quando esta é multiplicada pela função arbitrária  $\psi_\alpha = \psi_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t)$  que, por sua vez, pode representar propriedades convenientes associadas à espécie  $\alpha$ ; em seguida integra-se sobre todos os valores de  $\mathbf{c}_\alpha$ , ou seja:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \psi_\alpha d\mathbf{c}_\alpha + \int c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \psi_\alpha d\mathbf{c}_\alpha + \int F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} \psi_\alpha d\mathbf{c}_\alpha \\ &= \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \psi_\alpha (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}_\beta d\mathbf{c}_\alpha \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

A equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \psi_\alpha c_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha - \int \left[ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial c_i^\alpha} \right] f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha \\ &= \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (\psi'_\alpha - \psi_\alpha) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Na equação anterior foi introduzida a seguinte abreviação :

$$d\Gamma_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}_\beta d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.5.3)$$

considerou-se também que:

a) As velocidades moleculares independem da posição , logo,

$$\frac{\partial c_i^\alpha}{\partial x_j} = 0; \quad (2.5.4)$$

b) A integral

$$\int \frac{\partial \psi_\alpha F_i^\alpha f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} d\mathbf{c}_\alpha \equiv \int \oint \psi_\alpha F_i^\alpha f_\alpha n_i^\alpha dS_\alpha = 0, \quad (2.5.5)$$

pois a grandes velocidades a função de distribuição decai rapidamente a zero. Isto é válido para pontos infinitamente distantes que compõem o elemento de superfície  $dS_\alpha$  com vetor normal unitário  $n_i^\alpha$  (utiliza-se o teorema da divergência);

c) À direita da igualdade na equação de transporte foi levada em conta uma permuta de símbolos, trocando-se as quantidades iniciais (sem linhas) pelas quantidades finais (com linhas), o que equivale à colisão inversa, lembrando também as relações entre estas quantidades estudadas no item *dinâmica da colisão binária*.

Cada termo da equação de transporte possui uma denominação de acordo com sua função nesta que pode ser reescrita desta forma:

$$\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Psi_\alpha v_i^\alpha + \Phi_i^\alpha) = S_\alpha + P_\alpha, \quad (2.5.6)$$

com

$$\Psi_\alpha = \int \psi_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.5.7)$$

$$\Phi_i^\alpha = \int \psi_\alpha C_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.5.8)$$

$$S_\alpha = \int F_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial c_i^\alpha} f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad (2.5.9)$$

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (\psi'_\alpha - \psi_\alpha) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\alpha\beta} + \int \left[ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i^\alpha} \right] f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha. \quad (2.5.10)$$

As quantidades acima representam respectivamente: a densidade da quantidade aditiva arbitrária, a densidade de fluxo, a densidade de suprimento devida às forças externas e a produção (devida às colisões e também a produção própria).

## 2.6) TEORIA CINÉTICA COM $5 \nu$ CAMPOS ESCALARES

É possível obter as leis de Fick, Navier-Stokes e Fourier a partir da equação de Boltzmann e, portanto, descrever o comportamento macroscópico de gases próximos ao equilíbrio, utilizando o método de Chapman-Enskog [1] ou o método dos momentos de Grad [2]. Ambos fornecem uma solução aproximada para a equação de Boltzmann ou, em outras palavras, para a função de distribuição. O primeiro método está relacionado com a termodinâmica usual, enquanto que o segundo está relacionado à termodinâmica estendida. O que define o número de campos básicos a ser utilizado é o método empregado e as características do gás em análise. Os coeficientes de transporte também podem ser calculados a partir de um método que simplifica o termo de colisão na equação de Boltzmann, conhecido por modelo BGK [7]. Este não será apresentado aqui mas a expansão da função de distribuição em relação às velocidades a partir da maxwelliana proposta nele [8] serviu de inspiração para o *método alternativo*.

O *método alternativo* [5] é desenvolvido a partir de uma combinação conveniente de características dos métodos de Chapman-Enskog e Grad que resulta em uma simplificação interessante conforme será apresentado no próximo capítulo.

Para iniciar a descrição da mistura de gases monoatômicos pode-se determinar, a princípio, os  $5\nu$  campos escalares:

$$\rho_\alpha(\mathbf{x}, t), v_i^\alpha(\mathbf{x}, t), T_\alpha(\mathbf{x}, t),$$

que representam a densidade, a velocidade e a temperatura do constituinte  $\alpha$  respectivamente. As equações de balanço podem ser obtidas a partir da equação de transporte (2.5.2) substituindo-se  $\psi_\alpha$  pelas quantidades adequadas conforme segue:

**a) BALANÇO DE MASSA PARCIAL,  $\psi_\alpha = m_\alpha$ :**

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\alpha v_i^\alpha}{\partial x_i} = 0; \quad (2.6.1)$$

b) *BALANÇO DE MOMENTO LINEAR PARCIAL*,  $\psi_\alpha = m_\alpha c_i^\alpha$ :

$$\frac{\partial \rho_\alpha v_i^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij}^\alpha + \rho_\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha) = \rho_\alpha F_i^\alpha + P_i^\alpha, \quad (2.6.2)$$

onde

$$P_i^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int m_\alpha (c_i^{\alpha'} - c_i^\alpha) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\alpha\beta}; \quad (2.6.3)$$

c) *BALANÇO DA DENSIDADE DE ENERGIA DO CONSTITUINTE*  $\alpha$ ,  $\psi_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_\alpha \epsilon_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha v_\alpha^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ q_i^\alpha + \rho_\alpha \left( \epsilon_\alpha + \frac{1}{2} v_\alpha^2 \right) v_i^\alpha + p_{ir}^\alpha v_r^\alpha \right] = F_i^\alpha \rho_\alpha v_i^\alpha + P_{rr}^{\alpha*}, \quad (2.6.4)$$

onde

$$P_{rr}^{\alpha*} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \frac{1}{2} m_\alpha (c_\alpha'^2 - c_\alpha^2) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\alpha\beta}. \quad (2.6.5)$$

A partir da equação (2.6.5) pode-se obter uma equação para o balanço da densidade de energia interna do constituinte  $\alpha$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \epsilon_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i^\alpha + \rho_\alpha \epsilon_\alpha v_i^\alpha) + p_{ri}^\alpha \frac{\partial v_r^\alpha}{\partial x_i} = P_{rr}^\alpha, \quad (2.6.6)$$

onde

$$P_{rr}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \frac{1}{2} m_\alpha (C_\alpha'^2 - C_\alpha^2) f_\alpha f_\beta d\Gamma_{\alpha\beta}; \quad (2.6.7)$$

Nas equações anteriores aparecem, além dos campos básicos da densidade parcial ( $\rho_\alpha$ ), velocidade ( $v_i^\alpha$ ) e temperatura ( $T_\alpha$ ), as quantidades  $p_{ij}^\alpha$  e  $q_i^\alpha$  no lado esquerdo das equações bem como os termos  $P_i^\alpha$ ,  $P_{rr}^\alpha$  e  $P_{rr}^{\alpha*}$  no lado direito. Considerando que estes não fazem parte dos campos básicos, o sistema de equações fica aberto; eles são denominados *termos constitutivos*. A completeza do sistema somente será possível se os mesmos puderem ser expressos em termos dos campos básicos.

## 2.7) TEORIA CINÉTICA DOS $\nu + 4$ CAMPOS ESCALARES

A partir das equações de balanço parciais, somando em todos os constituintes e definindo convenientemente algumas grandezas, é possível a determinação das equações de campo da mistura:

a) *BALANÇO DE MASSA DA MISTURA*: (Somando a equação 2.6.1 sobre todos os constituintes)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0; \quad (2.7.1)$$

b) *BALANÇO DE MOMENTO LINEAR DA MISTURA*: (Somando a equação 2.6.2 sobre todos os constituintes)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij} + \rho v_i v_j) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_{\alpha} F_i^{\alpha}, \quad (2.7.2)$$

onde

$$p_{ij} = \sum (p_{ij}^{\alpha} + \rho_{\alpha} u_i^{\alpha} u_j^{\alpha}) \quad (2.7.3)$$

é o tensor pressão da mistura e o termo de produção (à direita da igualdade) vale zero em função da lei da conservação do momento linear.

c) *BALANÇO DE ENERGIA DA MISTURA*: (Somando a equação 2.6.6 sobre todos os componentes da mistura)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ q_i + \rho \left( \epsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) v_i + p_{ir} v_r \right] = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_{\alpha} F_i^{\alpha} v_i^{\alpha}, \quad (2.7.4)$$

onde

$$\rho \epsilon = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_{\alpha} \left( \epsilon_{\alpha} + \frac{1}{2} u_{\alpha}^2 \right), \quad (2.7.5)$$

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left[ q_i^{\alpha} + \rho_{\alpha} \left( \epsilon_{\alpha} + \frac{1}{2} u_{\alpha}^2 \right) u_i^{\alpha} + p_{ir}^{\alpha} u_r^{\alpha} \right] \quad (2.7.6)$$

é o vetor fluxo de calor da mistura e o termo de produção correspondente é igual a zero em função de lei da conservação da energia.

Desenvolvendo a equação anterior pode-se ainda obter a equação da energia interna da mistura:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i + \rho \epsilon v_i) + p_{ir} \frac{\partial v_r}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7.7)$$

É possível desenvolver agora uma teoria que leve em conta os seguintes  $\nu + 4$  campos:

$$\rho_\alpha(\mathbf{x}, t), v_i(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t),$$

que representam a densidade do constituinte  $\alpha$ , a velocidade da mistura e a temperatura da mistura, respectivamente.

Fazendo  $J_i^\alpha = \rho_\alpha u_i^\alpha$  na equação de balanço de massa parcial (2.6.1) e reescrevendo as equações anteriores, obtém-se:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial J_i^\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_\alpha v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.7.8)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p_{ij} + \rho v_i v_j) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha F_i^\alpha, \quad (2.7.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i + \rho \epsilon v_i) + p_{ir} \frac{\partial v_r}{\partial x_i} = 0. \quad (2.7.10)$$

Nas equações de balanço obtidas, os termos constitutivos são dados por  $J_i^\alpha$ ,  $p_{ij}$  e  $q_i$  que por sua vez, caracterizam os fenômenos de transporte (de massa, momento linear e energia) que ocorrem no gás. A determinação destes termos pode ser feita através dos métodos da teoria cinética conforme será exposto a seguir.



3 O MÉTODO ALTERNATIVO

Para determinar os termos constitutivos desta teoria:  $J_i^\alpha$  ,  $p_{ij}$  e  $q_i$  que, por sua vez, são expressos através das leis de Fick, Navier-Stokes e Fourier, as quais caracterizam os fenômenos de transporte (de massa, momento linear e energia) que ocorrem no gás, pode-se valer, conforme anteriormente mencionado, dos métodos de Chapman-Enskog, de Grad ou do método alternativo. Na sequência será exposto resumidamente cada método e, para ilustrar suas principais características, eles serão aplicados inicialmente para um gás monoatômico. Ao final, o método alternativo será estendido para aproximações sucessivas dos coeficientes de transporte e no próximo capítulo será desenvolvido para misturas de gases monoatômicos.

3.1) O MÉTODO DE CHAPMAN-ENSKOG

Para um gás clássico ideal que é caracterizado pela função de distribuição  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ , a equação de Boltzmann pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \epsilon d \mathbf{c}_1 \tag{3.1.1}$$

A equação anterior é deduzida da mesma forma que o já feito no capítulo 2 (vide a equação 2.3.11), nela  $\mathbf{x}$  é a posição da partícula e  $\mathbf{c}$  a velocidade no instante  $t$  ;  $F_i$  é a força externa específica que atua sobre as partículas; o sub-índice "1" serve para diferenciar uma das duas partículas que colidem; as variáveis  $b$  e  $\epsilon$  são parâmetros de impacto;  $g = c_1 - c$  é a velocidade relativa de duas partículas antes da colisão e as variáveis com linha correspondem a velocidades pós-colisionais.

Para um gás monoatômico, é possível utilizar como campos básicos os seguintes:

$$\rho = \int m f d\mathbf{c}, \quad (3.1.2)$$

$$v_i = \frac{1}{\rho} \int m c_i f d\mathbf{c}, \quad (3.1.3)$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{m}{k\rho} \int \frac{1}{2} m C^2 f d\mathbf{c} \quad (3.1.4),$$

que representam a densidade de massa, a velocidade e a temperatura, respectivamente, ou seja, 5 campos escalares. Vale observar também que a velocidade peculiar é dada por  $C_i = c_i - v_i$ .

Multiplicando a equação de Boltzmann pela função arbitrária  $\psi$  e integrando sobre todas as velocidades, obtém-se a equação de transporte, conforme feito no capítulo 2 (equação 2.5.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d\mathbf{c} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \psi c_i f d\mathbf{c} - \int \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial \psi}{\partial c_i} \right] f d\mathbf{c} \\ = \int (\psi'_1 - \psi) f_1 f g b db d\epsilon d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Substituindo  $\psi$  pelas quantidades microscópicas convenientes:  $m$ ,  $m c_i$  e  $m C^2$ , encontram-se as equações de balanço de massa, momento linear e energia interna, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j + p_{ij})}{\partial x_j} = \rho F_i, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \epsilon v_i + q_i)}{\partial x_i} + p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0. \quad (3.1.8)$$

Os termos constitutivos a serem determinados nesta teoria são  $p_{ij}$  e  $q_i$ , que precisam ser relacionados com os campos básicos ( $\rho$ ,  $v_i$  e  $T$ ).

A idéia básica do método de Chapman-Enskog é dividir a função de distribuição em dois termos aditivos, o primeiro consistindo na função maxwelliana (a qual

caracteriza o estado de equilíbrio) que fornece os valores locais da densidade, da velocidade e da temperatura. Este primeiro termo corresponde à primeira aproximação da função de distribuição . O segundo termo consiste em um desvio da função de distribuição de Maxwell e corresponde à segunda aproximação da função de distribuição . É dele que resultam as grandezas de transporte por sua vez relacionadas ao deviante do tensor pressão (deviante da velocidade) e ao fluxo de calor (gradiente de temperatura).

Sendo assim é possível escrever para a função de distribuição :

$$f = f^{(0)} (1 + \Phi) , \quad (3.1.9)$$

onde  $f^{(0)}$  é a função de distribuição das velocidades de Maxwell:

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{m} \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mC^2}{2kT}} \quad (3.1.10)$$

e  $\Phi$  é o desvio da maxwelliana.

Desta forma, pode-se utilizar as definições do tensor pressão e do fluxo de calor e escrever:

$$p_{ij} = \int m C_i C_j f d\mathbf{c} = p \delta_{ij} + \int m C_i C_j f^{(0)} \Phi d\mathbf{c} \quad (3.1.11)$$

$$q_i = \int m \frac{C^2}{2} C_i f d\mathbf{c} = \int m \frac{C^2}{2} C_i f^{(0)} \Phi d\mathbf{c} \quad (3.1.12)$$

Então, para determinar o tensor pressão e o fluxo de calor é necessário conhecer o desvio da função de distribuição em equilíbrio. Isto é feito a partir da equação de Boltzmann.

Inserindo a expressão para a função de distribuição , equação (3.1.9), na equação de Boltzmann (3.1.1) resulta:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + c_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial c_i} = I [\Phi] , \quad (3.1.13)$$

onde

$$I[\Phi] = \int f^{(0)} f_1^{(0)} (\Phi'_1 + \Phi' - \Phi_1 - \Phi) g b d b d \epsilon d \mathbf{c}_1 \quad (3.1.14)$$

A equação (3.1.13) foi obtida para uma teoria linearizada, o que implica na manutenção apenas de termos lineares no lado direito (integral) e no lado esquerdo somente as derivadas de  $f^{(0)}$  foram levadas em consideração, haja vista serem elas as causadoras do desvio  $\Phi$  da função de distribuição de Maxwell. Sendo conhecida a função maxwelliana, o lado esquerdo da equação é conhecido, logo há que se resolver uma equação integral não homogênea para determinar  $\Phi$ . Este é um problema fundamental em teoria cinética dos gases.

Procedendo as derivadas da função maxwelliana na equação (3.1.13), multiplicando pela função arbitrária  $\psi$  e integrando em todos os valores das velocidades quando  $\psi$  assume os valores  $m$ ,  $mc_i$  e  $mC^2$ , resultam as seguintes equações :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.15)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j + \rho \frac{k}{m} T \delta_{ij})}{\partial x_j} = \rho F_i, \quad (3.1.16)$$

$$\frac{\partial (\frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} T)}{\partial t} + \frac{\partial (\frac{3}{2} \rho \frac{k}{m} T) v_j}{\partial x_j} + \rho \frac{k}{m} T \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.17)$$

que são, na realidade, as equações de campo para densidade de massa, densidade de momento linear e densidade de energia interna para um fluido de Euler, ou seja, um fluido que tem as equações constitutivas dadas por  $p_{ij} = \rho \frac{k}{m} T \delta_{ij}$  e  $q_i = 0$ .

A partir das equações de campo para um fluido de Euler pode-se eliminar as derivadas temporais da equação (3.1.13) que implica em:

$$f^{(0)} \left[ \left( \frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) \frac{C_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m}{kT} C_i C_j \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} \right] = I[\Phi]. \quad (3.1.18)$$

Devido às características desta equação, supõe-se que  $\Phi$  pode ser determinada em primeira aproximação por [1]:

$$\Phi = a \left( \frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) \frac{C_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + b \frac{m}{kT} C_i C_j \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \quad (3.1.19)$$

onde devem ser encontrados os coeficientes

$$a = a(\rho, T), \quad b = b(\rho, T). \quad (3.1.20)$$

Agora, substituindo  $\Phi$  da equação (3.1.19) na equação (3.1.18), multiplicando por  $C^2 C_j$  e por  $C_{<k} C_{l>}$  e integrando em todas as velocidades, encontra-se o valor dos coeficientes  $a$  e  $b$ :

$$a = \frac{15}{32} \frac{m}{\rho \Omega^{(2,2)}} \left( \frac{m}{\pi k T} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.21)$$

$$b = \frac{5}{16} \frac{m}{\rho \Omega^{(2,2)}} \left( \frac{m}{\pi k T} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.22)$$

onde

$$\Omega^{(2,2)} = \int e^{-\gamma^2} \gamma^7 (1 - \cos^2 \chi) b d b d \gamma, \quad (3.1.23)$$

com  $\chi$  correspondendo ao ângulo de espalhamento (associado ao potencial de interação molecular) e  $\gamma^2 = \frac{mg^2}{4kT}$ .

Desta forma encontram-se as leis de Navier-Stokes e Fourier para o tensor pressão e para o fluxo de calor:

$$p_{ij} = \int m C_i C_j f^{(0)} (1 + \Phi) d\mathbf{c} = \rho \frac{k}{m} T \delta_{ij} - 2\mu \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \quad (3.1.24)$$

$$q_i = \int \frac{1}{2} m C^2 C_i f^{(0)} (1 + \Phi) d\mathbf{c} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.1.25)$$

Nas equações para  $p_{ij}$  e  $q_i$  ainda é possível identificar os coeficientes de viscosidade de cisalhamento e de condutividade térmica expressos respectivamente por:

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{1}{\Omega^{(2,2)}} \left( \frac{mkT}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.26)$$

$$\lambda = \frac{15}{4} \frac{k}{m} \mu \quad (3.1.27)$$

Desta forma consegue-se resolver o problema inicial de encontrar a função de distribuição e os termos constitutivos da teoria. É importante notar que os resultados apresentados são escritos em função dos potenciais de interação molecular, que aparecem nas integrais (3.1.23). Estes valores estão tabelados na referência [1].

### 3.2) O MÉTODO DE GRAD

No método de Grad, a descrição macroscópica de um gás monoatômico ideal pode ser feita através de uma teoria dos 13 momentos, quais sejam:

$$\rho = \int m f d\mathbf{c}, \quad (3.2.1)$$

$$v_i = \frac{1}{\rho} \int m c_i f d\mathbf{c}, \quad (3.2.2)$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{m}{k\rho} \int \frac{1}{2} m C^2 f d\mathbf{c}, \quad (3.2.3)$$

$$p_{<ij>} = \int m C_i C_j f d\mathbf{c}, \quad (3.2.4)$$

$$q_i = \int \frac{1}{2} m C^2 C_i f d\mathbf{c}, \quad (3.2.5)$$

que representam, respectivamente, a densidade de massa, a velocidade, a temperatura, o deviante do tensor pressão e o fluxo de calor.

Substituindo na equação de transporte (3.1.5) a quantidade arbitrária  $\psi$  pelos valores convenientes:  $m$ ;  $m c_i$ ;  $\frac{m}{2} C^2$ ;  $m C_{<i} C_{j>}$  e  $\frac{m}{2} C^2 C_i$ , obtém-se as seguintes equações de balanço de massa, momento linear, energia interna, do tensor pressão e do fluxo de calor, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j + p_{ij})}{\partial x_j} = \rho F_i, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\epsilon v_i + q_i)}{\partial x_i} + p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \quad (3.2.8)$$

$$\frac{\partial p_{<ij>}}{\partial t} + \frac{\partial(p_{<ij>k} + p_{<ij>v_k})}{\partial x_k} + p_{<ik>} \frac{\partial v_{<j>}}{\partial x_{<k>}} + p_{<jk>} \frac{\partial v_{<i>}}{\partial x_{<k>}} = P_{<ij>}, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial(q_{ij} + q_i v_j)}{\partial x_j} + p_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + q_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{p_{ij}}{\rho} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} - \frac{p_{rr}}{2\rho} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = Q_i. \quad (3.2.10)$$

Nestas equações de balanço os termos constitutivos, identificados por  $p_{ijk}$ ,  $P_{ij}$ ,  $q_{ij}$  e  $Q_i$ , são dados por:

$$p_{ijk} = \int m C_i C_j C_k f d\mathbf{c}, \quad (3.2.11)$$

$$P_{ij} = \int m (C'_i C'_j - C_i C_j) f_1 f g b d b d \epsilon d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}, \quad (3.2.12)$$

$$q_{ij} = \int \frac{m}{2} C^2 C_i C_j f d\mathbf{c}, \quad (3.2.13)$$

$$Q_i = \int \frac{m}{2} (C'^2 C'_i - C^2 C_i) f f_1 g b d b d \epsilon d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}. \quad (3.2.14)$$

Outra característica do método de Grad é que, além de utilizar mais campos básicos que o método de Chapman-Enskog, conforme pode ser observado da descrição anterior, ele expande a função de distribuição em termos da função maxwelliana e de polinômios de Hermite cujos coeficientes estão relacionados aos momentos da função de distribuição o que, em última análise, implica na expansão da função de distribuição em termos das velocidades, isto leva a escrever [2]:

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2\rho} \left( \frac{m}{kT} \right)^2 \left[ p_{<ij>} C_i C_j + 2q_i C_i \left( \frac{mC^2}{5kT} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (3.2.15)$$

Substituindo a função de distribuição (3.2.15) nas expressões para  $p_{ijk}$ ,  $q_{ij}$ ,  $P_{ij}$  e  $Q_i$ , encontra-se:

$$p_{ijk} = \frac{2}{5} (q_i \delta_{jk} + q_j \delta_{ik} + q_k \delta_{ij}), \quad (3.2.16)$$

$$q_{ij} = \frac{5}{2} \left( \frac{kT}{m} \right)^2 \rho \delta_{ij} + \frac{7}{2} \left( \frac{kT}{m} \right) p_{<ij>}, \quad (3.2.17)$$

$$P_{ij} = -\frac{16}{5} \frac{\rho}{m} \left( \frac{\pi k T}{m} \right)^2 \Omega^{(2,2)} p_{<ij>}, \quad (3.2.18)$$

$$Q_i = -\frac{32}{15} \frac{\rho}{m} \left( \frac{\pi k T}{m} \right)^2 \Omega^{(2,2)} q_i. \quad (3.2.19)$$

Nas equações anteriores todos os termos constitutivos foram expressos em função dos campos básicos o que permite utilizar um processo conhecido por *iteração maxwelliana* [9]. Esta interação consiste em substituir os termos constitutivos, equações (3.2.16) a (3.2.19), nas equações de balanço (3.2.9) e (3.2.10) para considerar no lado esquerdo destas que  $p_{<ij>} = 0$  e  $q_i = 0$  (o que corresponde à primeira iteração). A solução deste sistema resulta nas leis de Navier-Stokes e Fourier:

$$p_{<ij>} = -2\mu \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \quad (3.2.20)$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.2.21)$$

As equações para  $p_{<ij>}$  e  $q_i$  são idênticas às obtidas anteriormente no método de Chapman-Enskog, portanto, o método de Grad implica nos mesmos resultados para os coeficientes de viscosidade e de condutividade térmica que os obtidos na seção 3.1 (vide equações 3.1.24 a 3.1.27).

### 3.3) O MÉTODO ALTERNATIVO

No método de Chapman-Enskog a função de distribuição é escrita como sendo formada de duas partes (uma delas é a função maxwelliana enquanto que a outra é um desvio desta) de tal forma que o desvio do equilíbrio da função de distribuição é obtido a partir de uma equação integral que, por sua vez, é consequência da equação de Boltzmann. Resolvida a equação integral, pode-se calcular os coeficientes de transporte.

No método dos momentos de Grad, o desvio do equilíbrio da função distribuição é dado em termos de seus momentos e os coeficientes de transporte são obtidos a partir das equações de balanço através de um esquema iterativo.



É interessante notar que pode ser provada a equivalência entre os dois métodos com respeito às aproximações sucessivas dos coeficientes de transporte [4].

Quanto ao método alternativo, pode-se dizer que este combina algumas características dos dois citados anteriormente mas de tal forma que não é necessária a solução da equação integral, nem são necessárias as equações de campo dos momentos. Este método consiste basicamente na utilização da função de distribuição definida em termos dos momentos (conforme o método de Grad), a partir da qual podem ser derivadas as equações constitutivas para o tensor pressão e para o fluxo de calor diretamente da equação de Boltzmann (seguindo o método de Chapman- Enskog).

Seja, então, um gás monoatômico caracterizado, conforme visto anteriormente, pela função de distribuição  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$  e que obedece à equação de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial c_i} = \int (f'_1 f' - f_1 f) g b d b d \epsilon d \mathbf{c}_1. \quad (3.3.1)$$

De acordo com o método de Grad pode-se caracterizar o gás através dos seguintes momentos da função de distribuição, que representam a densidade de massa, a velocidade, a temperatura, o deviante do tensor pressão e o fluxo de calor:

$$\rho = \int m f d\mathbf{c}, \quad (3.3.2)$$

$$v_i = \frac{1}{\rho} \int m c_i f d\mathbf{c}, \quad (3.3.3)$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{m}{k\rho} \int \frac{1}{2} m C^2 f d\mathbf{c}, \quad (3.3.4)$$

$$p_{<ij>} = \int m C_{<i} C_{j>} f d\mathbf{c}, \quad (3.3.5)$$

$$q_i = \int \frac{1}{2} m C^2 C_i f d\mathbf{c}. \quad (3.3.6)$$

Ainda neste método a função de distribuição é expandida em termos da função maxwelliana  $f^{(0)}$  e das velocidades implicando para o caso destes 13 momentos em:

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2\rho} \left( \frac{m}{kT} \right)^2 \left[ p_{<ij>} C_i C_j + 2q_i C_i \left( \frac{mC^2}{5kT} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (3.3.7)$$

que de acordo com o método de Chapman-Enskog também pode ser escrita como:

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = f^{(0)} (1 + \Phi). \quad (3.3.8)$$

Substitui-se na equação de Boltzmann (3.3.1) a função de distribuição (3.3.8), desprezando os termos não lineares para obter uma equação idêntica à (3.1.13); multiplica-se esta por  $m$ ,  $mc_i$  e  $mC^2$  e a seguir integra-se em todas as velocidades, o que implica nas equações de balanço para um fluido de Euler (vide equações 3.1.15 a 3.1.17). A partir das equações para um fluido de Euler é possível eliminar as derivadas temporais da equação de Boltzmann, o que resulta numa equação integral da mesma forma que (3.1.18):

$$f^{(0)} \left[ \left( \frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) \frac{C_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m}{kT} C_i C_j \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} \right] = I[\Phi]. \quad (3.3.9)$$

No método alternativo a integral à direita da igualdade em (3.3.9) é encontrada através da substituição da função de distribuição de Grad (3.3.7) na equação de Boltzman. Isto resulta em:

$$I[\Phi] = p_{<ij>} \frac{1}{2\rho} \left( \frac{m}{kT} \right)^2 I[C_i C_j] - q_i \frac{2}{5\rho} \left( \frac{m}{kT} \right)^2 I \left[ \left( \frac{5}{2} - \frac{mC^2}{2kT} \right) C_i \right]. \quad (3.3.10)$$

Agora, multiplicando a equação (3.3.9) por  $C_{<k} C_{l>}$  (e depois por  $C^2 C_k$ ) e integrando-se sobre todos os valores das velocidades, encontram-se as leis de Navier-Stokes e Fourier:

$$p_{<ij>} = -2\mu \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \quad (3.3.11)$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (3.3.12)$$

Estas equações para  $p_{ij}$  e  $q_i$  são idênticas às encontradas nos métodos de Chapman-Enskog (3.1.19) e (3.1.20) e de Grad (3.2.20) e (3.2.21), implicando nas mesmas expressões para os coeficientes de viscosidade e de condutividade térmica.

### 3.4) O MÉTODO ALTERNATIVO E AS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS PARA OS COEFICIENTES DE TRANSPORTE

Para que se faça uma caracterização mais completa do gás, pode-se aumentar o número de momentos da função de distribuição e com isto obter aproximações sucessivas para os coeficientes de transporte. Tendo em vista estas aproximações sucessivas, para a generalização do método alternativo, deve-se fazer uso dos seguintes momentos da função de distribuição :

$$\rho = \int m f d\mathbf{c}, \quad (3.4.1)$$

$$v_i = \frac{1}{\rho} \int m c_i f d\mathbf{c}, \quad (3.4.2)$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{m}{k\rho} \int \frac{1}{2} m C^2 f d\mathbf{c}, \quad (3.4.3)$$

$$p_{<ij>}^{(s)} = 15 \frac{2s!!}{(2s+5)!!} \int m S_{\frac{5}{2}}^{(s)} C_{<i} C_{j>} f d\mathbf{c}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4.4)$$

$$q_i^{(s)} = -\frac{15}{2\beta} \frac{2s!!}{(2s+3)!!} \int m S_{\frac{3}{2}}^{(s)} C_i f d\mathbf{c}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.5)$$

Onde  $\rho$ ,  $v_i$  e  $T$  representam a densidade de massa, a velocidade e a temperatura, respectivamente;  $p_{<ij>}^{(s)} = p_{ij}^{(s)} - \frac{1}{3} p_{rr}^{(s)} \delta_{ij}$  são componentes de tensores sem traço de segunda ordem e  $q_i^{(s)}$  são componentes de vetores. Define-se ainda  $\beta = \frac{m}{kT}$ ;  $2n!! = 2^n n!$  e  $S_{l+\frac{1}{2}}^{(s)}$  são polinômios de Sonine cuja fórmula de recorrência pode ser expressa por:

$$S_{l+\frac{1}{2}}^{(s)} = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})}{k! (n-k)! \Gamma(k+l+\frac{3}{2})} (-\beta C^2)^k. \quad (3.4.6)$$

Note-se também que  $p_{<ij>}^{(0)} = p_{<ij>}$  é o deviante do tensor pressão e  $q_i^{(1)} = q_i$  é o fluxo de calor. Os demais termos,  $p_{<ij>}^{(s)}$ , ( $s \neq 0$ ) e  $q_i^{(s)}$ , ( $s \neq 1$ ) não possuem nomes próprios.

Considerando-se os momentos dados, aplica-se o mesmo procedimento da seção anterior para determinar a função de distribuição (conforme o método de Grad).

Então:

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{2\rho} \sum_{s=0}^{\infty} S_{\frac{5}{2}}^{(s)} p_{<ij>}^{(s)} C_i C_j - \frac{2\beta^2}{5\rho} \sum_{s=1}^{\infty} S_{\frac{3}{2}}^{(s)} q_i^{(s)} C_i \right\}. \quad (3.4.7)$$

A função de distribuição (3.4.7) é uma expansão a partir da função de distribuição maxwelliana, considerando infinitos momentos e velocidades.

Fazendo ainda a analogia com a seção anterior, é preciso estabelecer a equação integral (associada ao método de Chapman- Enskog), a qual é obtida quando se substituem as derivadas temporais da função maxwelliana no lado direito da equação de Boltzmann linearizada, a partir das equações de balanço para um fluido de Euler, equações (3.1.15) a (3.1.17). Esta equação integral assume a forma:

$$f^{(0)} \left[ \beta S_{\frac{5}{2}}^{(0)} C_k C_l \frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}} - \frac{1}{T} S_{\frac{3}{2}}^{(1)} C_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right] = I [\Phi] \quad (3.4.8)$$

Substituindo a expansão da função de distribuição (3.4.7) na integral à direita, obtém-se:

$$I [\Phi] = \frac{\beta^2}{2\rho} \sum_{s=0}^{\infty} p_{<kl>}^{(s)} I \left[ S_{\frac{5}{2}}^{(s)} C_k C_l \right] - \frac{2\beta^2}{5\rho} \sum_{s=1}^{\infty} q_k^{(s)} I \left[ S_{\frac{3}{2}}^{(s)} C_k \right]. \quad (3.4.9)$$

Agora, multiplicando a equação (3.4.8) por  $\beta S_{\frac{5}{2}}^{(r)} C_{<i} C_{j>}$  e integrando-se em todas as velocidades, fica:

$$-2\rho \frac{5}{4} \delta^{(0,r)} \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{(r,s)} p_{<ij>}^{(s)}, \quad (3.4.10)$$

onde  $\delta^{(0,r)}$  é o delta de Kronecker e  $\beta^{(r,s)}$  é dada por:

$$\beta^{(r,s)} = -\frac{\beta^3}{8} \frac{m}{\rho} \int S_{\frac{5}{2}}^{(r)} C_{<k} C_{l>} I \left[ S_{\frac{5}{2}}^{(s)} C_{<k} C_{l>} \right] dc. \quad (3.4.11)$$

Esta equação pode ser resolvida para o deviante do tensor pressão, o que resulta na lei de Navier-Stokes. Multiplica-se (3.4.11) por  $(\beta^{-1})^{(t,r)}$  e soma-se em  $r$  variando de zero a infinito, implicando em:

$$p_{<\dot{y}j>}^{(t)} = -2\rho \frac{5}{4} (\beta^{-1})^{(t,0)} \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \quad (3.4.12)$$

que em primeira aproximação ( $t = 0$ ) fornece o deviante do tensor pressão:

$$p_{<\dot{y}j>} = -2 [\mu] \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}. \quad (3.4.13)$$

Sendo o coeficiente de viscosidade de cisalhamento expresso por:

$$[\mu] = \frac{5}{4} \rho (\beta^{-1})^{(0,0)}. \quad (3.4.14)$$

Multiplicando também a equação (3.4.8) por  $\beta S_{\frac{3}{2}}^{(r)} C_i$  e integrando sobre todos os valores das velocidades, resulta:

$$-\frac{75}{16} \rho \frac{k}{m} \delta^{(1,r)} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^{(r,s)} q_i^{(s)}, \quad (3.4.15)$$

onde

$$\alpha^{(r,s)} = -\frac{\beta^2}{4} \frac{m}{\rho} \int S_{\frac{3}{2}}^{(r)} C_i I \left[ S_{\frac{3}{2}}^{(s)} C_i \right] d\mathbf{c}. \quad (3.4.16)$$

Resolvida a equação (3.4.15) para o fluxo de calor,  $q_i^{(1)}$ , encontra-se a lei de Fourier:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.4.17)$$

onde o coeficiente de condutividade térmica é expresso por:

$$\lambda = \frac{75}{16} \rho \frac{k}{m} (\alpha^{-1})^{(1,1)}. \quad (3.4.18)$$

## 4 O MÉTODO ALTERNATIVO PARA MISTURAS

### 4.1) PRIMEIRA APROXIMAÇÃO PARA OS COEFICIENTES DE TRANSPORTE

Para desenvolver o método alternativo aplicado a uma mistura de gases, denota-se por  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{c}_\alpha$  a posição e a velocidade, respectivamente, de uma partícula do constituinte  $\alpha$  da mistura,  $\alpha = 1, 2, \dots, \nu$ . O estado desta mistura é caracterizado pelo conjunto das funções de distribuição de cada constituinte:

$$f_\alpha = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu),$$

de tal forma que  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha$  forneça no tempo  $t$  o número de partículas do constituinte  $\alpha$  no elemento de volume  $d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha$  com coordenadas entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  e entre  $\mathbf{c}_\alpha$  e  $\mathbf{c}_\alpha + d\mathbf{c}_\alpha$ .

A função de distribuição para a espécie  $\alpha$  obedece à equação de Boltzmann:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g^{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}_\beta. \quad (4.1.1)$$

Na equação de Boltzmann o termo  $F_i^\alpha$  representa a força externa específica que atua sobre as partículas do gás;  $\mathbf{g}^{\beta\alpha} = \mathbf{c}^\beta - \mathbf{c}^\alpha$  é a velocidade relativa de duas partículas antes da colisão;  $b$  e  $\epsilon$  são parâmetros de impacto e as "linhas" referem-se às velocidades pós colisionais. Além disto,  $f_\beta$  denota  $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\beta, t)$ .

Considerando o método de Grad, o estado macroscópico de uma mistura pode ser caracterizado pelos momentos das funções de distribuição de cada espécie:

$$\rho_\alpha = \int m_\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha, \quad \text{com} \quad \rho = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha; \quad (4.1.2)$$

$$v_i = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha v_i^\alpha, \quad \text{com} \quad v_i^\alpha = \frac{1}{\rho_\alpha} \int m_\alpha c_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha; \quad (4.1.3)$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{m_\alpha}{k\rho_\alpha} \int \frac{1}{2} m C_\alpha^2 f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha; \quad (4.1.4)$$

$$p_{<ij>}^\alpha = \int m_\alpha C_{<i}^\alpha C_{>j}^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha; \quad (4.1.5)$$

$$q_i^\alpha = \int \frac{1}{2} m_\alpha C_\alpha^2 C_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha; \quad (4.1.6)$$

$$J_i^\alpha = \int m_\alpha \xi_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha; \quad (4.1.7)$$

No conjunto de momentos, equações (4.1.2) a (4.1.7),  $m_\alpha$ ,  $\rho_\alpha$  e  $v_i^\alpha$  denotam a massa, a densidade de massa e a velocidade do constituinte  $\alpha$ , respectivamente;  $\rho$ ,  $v_i$  e  $T$  representam a densidade, a velocidade e a temperatura da mistura (supõe-se que os constituintes estão a uma mesma temperatura);  $p_{<ij>}^\alpha = p_{ij}^\alpha - \frac{1}{3} p_{rr}^\alpha \delta_{ij}$  é o deviante do tensor pressão da mistura;  $q_i^\alpha$  é o fluxo de calor do constituinte  $\alpha$  da mistura e  $J_i^\alpha$  é o fluxo de difusão. Além disto,  $C_i^\alpha = c_i^\alpha - v_i^\alpha$  e  $\xi_i^\alpha = c_i^\alpha - v_i$  são velocidades peculiares.

Para aplicar o método alternativo, inicia-se expandindo a função de distribuição em polinômios da velocidade peculiar  $\xi_i^\alpha$  em torno da função maxwelliana  $f_\alpha^{(0)}$  cujos coeficientes estão relacionados aos momentos (4.1.5) a (4.1.7), ou seja:

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(0)} \left\{ 1 + \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} \xi_i^\alpha J_i^\alpha + \frac{\beta_\alpha^2}{2\rho_\alpha} \left[ \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha p_{<ij>}^\alpha + \frac{4}{5} \xi_i^\alpha q_i^\alpha \left( \frac{\beta_\alpha \xi_\alpha^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \right] \right\}, \quad (4.1.8)$$

onde

$$f_\alpha^{(0)} = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha} \left( \frac{\beta_\alpha}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left( -\frac{\beta_\alpha \xi_\alpha^2}{2} \right)} \quad (4.1.9)$$

e

$$\beta_\alpha = \frac{m_\alpha}{kT} \quad (4.1.10)$$

Agora, de acordo com o método de Chapman-Enskog, substituindo  $f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(0)}(1 + \Phi_\alpha)$  na equação de Boltzmann e desprezando-se os termos de segunda ordem e superiores, é possível obter:

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial c_i^\alpha} = I_\alpha. \quad (4.1.11)$$

Na equação anterior considera-se apenas as derivadas de  $f_\alpha^{(0)}$ , pois são elas que causam o desvio da função distribuição. Quanto à integral  $I_\alpha$ , esta resulta da substituição da função de distribuição de Grad no lado direito da equação de Boltzmann desprezando-se os termos não lineares e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 I_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} & \left\{ I_{\alpha\beta} [\xi_i^\alpha \xi_j^\alpha] \frac{\beta_\alpha^2}{2\rho_\alpha} p_{<ij>}^\alpha + I_{\alpha\beta} [\xi_i^\beta \xi_j^\beta] \frac{\beta_\beta^2}{2\rho_\beta} p_{<ij>}^\beta \right. \\
 & + I_{\alpha\beta} [\xi_i^\alpha] \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} J_i^\alpha + I_{\alpha\beta} [\xi_i^\beta] \frac{\beta_\beta}{\rho_\beta} J_i^\beta \\
 & \left. + \frac{2}{5} I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_i^\alpha \right] \frac{\beta_\alpha^2}{\rho_\alpha} q_i^\alpha + \frac{2}{5} I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_\beta \xi_\beta^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_i^\beta \right] \frac{\beta_\beta^2}{\rho_\beta} q_i^\beta \right\}, \quad (4.1.12)
 \end{aligned}$$

onde

$$I_{\alpha\beta} [\Phi_\alpha] = \int f_\alpha^{(0)} f_\beta^{(0)} (\Phi'_\alpha - \Phi_\alpha) g^{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}_\beta. \quad (4.1.13)$$

Multiplicando a equação (4.1.11) sucessivamente por  $m_\alpha$ ,  $m_\alpha c_i^\alpha$  e  $\frac{1}{2} m_\alpha c_\alpha^2$  e integrando sobre todos os valores de  $\mathbf{c}_\alpha$ , obtém-se as equações de balanço:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\alpha v_i^\alpha}{\partial x_i} = 0; \quad (4.1.14)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha F_i^\alpha; \quad (4.1.15)$$

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial x_r} \right) + T \frac{\partial v_r}{\partial x_r} = 0. \quad (4.1.16)$$

Estas são as equações de balanço para um fluido de Euler, a partir das quais elimina-se as derivadas temporais de  $\rho_\alpha$ ,  $v_i$  e  $T$  na equação (4.1.11), o que resulta na equação integral:

$$f_\alpha^{(0)} \left[ \frac{n}{n_\alpha} \xi_k^\alpha d_k^\alpha + \left( \frac{\beta_\alpha \xi_\alpha^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \xi_k^\alpha + \beta_\alpha \xi_k^\alpha \xi_l^\alpha \frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{>l}} \right] = I_\alpha, \quad (4.1.17)$$

onde  $d_i^\alpha$  representa uma força de difusão generalizada definida por [10]:

$$d_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{n_\alpha}{n} \right) + \left( \frac{n_\alpha}{n} - \frac{\rho_\alpha}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\ln p) - \frac{\rho_\alpha}{p\rho} \left[ \rho F_i^\alpha - \sum_{\beta=1}^{\nu} \rho_\beta F_i^\beta \right], \quad (4.1.18)$$



com  $n_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}$  sendo a densidade de número de partículas do constituinte  $\alpha$ ,  $n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} n_\alpha$  a densidade de número de partículas da mistura e  $p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha \frac{k}{m_\alpha} T$  a pressão da mistura. Sendo  $\mu_\alpha = T \left( \frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} - \eta_\alpha \right)$  o potencial químico do constituinte  $\alpha$  e  $\eta_\alpha$  a entropia específica e utilizando as relações [11]

$$\mu_\alpha = \epsilon_\alpha - T\eta_\alpha + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha}$$

e

$$d\eta_\alpha = \frac{1}{T} \left( d\epsilon_\alpha - \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha^2} d\rho_\alpha \right) \quad (\text{equação de Gibbs}),$$

é possível, a partir da equação (4.1.18) escrever (recordando que  $\epsilon_\alpha = \frac{3}{2} \frac{kT}{m_\alpha}$ ):

$$p \frac{d_i^\alpha}{\rho_\alpha} = T \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_\alpha}{T} \right) + \frac{F_i^\alpha}{T} \right] + \frac{5}{2} T^2 \frac{k}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right). \quad (4.1.19)$$

Devido ao vínculo

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} d_i^\alpha = 0 \quad (4.1.20)$$

há  $(\nu - 1)$  forças de difusão generalizadas linearmente independentes.

A multiplicação da equação (4.1.17) por  $\beta_\alpha \xi_{<k}^\alpha \xi_{>l}^\alpha$  e sua integração sobre todos os valores de  $\xi_\alpha$  resulta em:

$$-2 \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \beta_{\alpha\beta} p_{<ij>}^\beta, \quad (4.1.21)$$

onde

$$\beta_{\alpha\beta} = -\frac{kT}{10} \frac{\beta_\alpha^2 \beta_\beta^2}{\rho_\alpha \rho_\beta} \int \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ \xi_{<p}^\beta \xi_{q>}^\beta \right] d\xi_\alpha \quad \alpha \neq \beta \quad (4.1.22)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha\alpha} = & -\frac{kT}{10} \frac{\beta_\alpha^4}{\rho_\alpha^2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha \right] \right. \\ & \left. + \int \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\alpha} \left[ \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha \right] d\xi_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Multiplicando a equação (4.1.21) por  $(\beta^{-1})_{\gamma\alpha}$ , em seguida somando em todos os valores de  $\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq \nu$ ) e considerando que

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} (\beta^{-1})_{\gamma\alpha} (\beta)_{\alpha\beta} = \delta_{\gamma\beta}, \quad (4.1.24)$$

é possível obter o deviante do tensor pressão parcial  $p_{<ij>}^{\alpha}$ .

A equação constitutiva para a pressão da mistura numa teoria linearizada é dada por  $p_{<ij>} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_{<ij>}^{\alpha}$ , ou seja:

$$p_{<ij>} = -2\mu \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \quad (4.1.25)$$

onde

$$\mu = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu} (\beta^{-1})_{\alpha\beta} \quad (4.1.26)$$

é o coeficiente de viscosidade de cisalhamento da mistura. A equação (4.1.25) é a expressão matemática da lei de Navier-Stokes.

A multiplicação da equação (4.1.17) por  $\frac{\beta_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \xi_l^{\alpha}$  e sua integração em  $\xi_{\alpha}$  conduz a:

$$-\frac{p}{\rho_{\alpha}} d_i^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} A_{\alpha\beta} J_i^{\beta} - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_{\beta} F_{\alpha\beta} q_i^{\beta}, \quad (4.1.27)$$

onde

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} \frac{\beta_{\alpha} \beta_{\beta}}{\rho_{\alpha} \rho_{\beta}} k T \int \xi_k^{\alpha} I_{\alpha\beta} [\xi_k^{\beta}] d\xi_{\alpha} \quad (\alpha \neq \beta), \quad (4.1.28)$$

$$A_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{3} \frac{\beta_{\alpha}^2}{\rho_{\alpha}^2} k T \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \xi_k^{\alpha} I_{\alpha\beta} [\xi_k^{\alpha}] d\xi_{\alpha} + \int \xi_k^{\alpha} I_{\alpha\alpha} [\xi_k^{\alpha}] d\xi_{\alpha} \right\}, \quad (4.1.29)$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \frac{\beta_{\alpha} \beta_{\beta}}{\rho_{\alpha} \rho_{\beta}} k T \int \xi_k^{\alpha} I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_{\beta} \xi_b^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^{\beta} \right] d\xi_{\alpha} \quad (\alpha \neq \beta) \quad (4.1.30)$$

e

$$\begin{aligned} F_{\alpha\alpha} = \frac{1}{3} \frac{\beta_{\alpha}^2}{\rho_{\alpha}^2} k T & \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \xi_k^{\alpha} I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_{\alpha} \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^{\alpha} \right] d\xi_{\alpha} \right. \\ & \left. + \int \xi_k^{\alpha} I_{\alpha\alpha} \left[ \left( \frac{m_{\alpha} \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^{\alpha} \right] d\xi_{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Multiplicando a equação (4.1.17) por  $\frac{\beta_\alpha^2}{\rho_\alpha} \left( \frac{m_\alpha \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_l^\alpha$  e integrando sobre todas as velocidades encontra-se:

$$\frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \beta_\alpha G_{\alpha\beta} J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu} H_{\alpha\beta} q_i^\beta, \quad (4.1.32)$$

onde

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \frac{\beta_\alpha \beta_\beta}{\rho_\alpha \rho_\beta} kT \int \left( \frac{m_\alpha \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha I_{\alpha\beta} [\xi_k^\beta] d\xi_\alpha = F_{\beta\alpha} \quad (\alpha \neq \beta), \quad (4.1.33)$$

$$G_{\alpha\alpha} = \frac{1}{3} \frac{\beta_\alpha^2}{\rho_\alpha^2} kT \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \left( \frac{m_\alpha \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha I_{\alpha\beta} [\xi_k^\alpha] d\xi_\alpha + \int \left( \frac{m_\alpha \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha I_{\alpha\alpha} [\xi_k^\alpha] d\xi_\alpha \right\} = F_{\alpha\alpha}, \quad (4.1.34)$$

$$H_{\alpha\beta} = -\frac{2}{15} \frac{\beta_\alpha^2 \beta_\beta^2}{\rho_\alpha \rho_\beta} kT \int \left( \frac{m_\alpha \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_\beta \xi_b^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\beta \right] d\xi_\alpha \quad (\alpha \neq \beta), \quad (4.1.35)$$

$$H_{\alpha\alpha} = -\frac{2}{15} \frac{\beta_\alpha^4}{\rho_\alpha^2} kT \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \left( \frac{m_\alpha \xi_a^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha \right] d\xi_\alpha + \int \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha I_{\alpha\alpha} \left[ \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_k^\alpha \right] d\xi_\alpha \right\} \quad (4.1.36)$$

Resolvendo as equações (4.1.27) e (4.1.32) é possível encontrar o fluxo de calor  $q_i^\alpha$  e o fluxo de difusão  $J_i^\alpha$ , bem como o fluxo de calor total  $q_i$ .

Se for considerado o vínculo (2.4.11), a equação (4.1.27) pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\frac{p}{\rho_\alpha} d_i^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} (A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\nu}) J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta F_{\alpha\beta} q_i^\beta. \quad (4.1.37)$$

A partir da equação (4.1.37), subtraindo-se a  $\nu$ -ésima da  $\alpha$ -ésima equação e utilizando também a (4.1.19), resulta:

$$-p \left( \frac{d_i^\alpha}{\rho_\alpha} - \frac{d_i^\nu}{\rho_\nu} \right) = T \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_\alpha - \mu_\nu}{T} \right) + \frac{F_i^\alpha - F_i^\nu}{T} \right] + \frac{5}{2} T^2 \left( \frac{k}{m_\alpha} - \frac{k}{m_\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu-1} [A_{\alpha\beta} - A_{\nu\beta} - A_{\alpha\nu} + A_{\nu\nu}] J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta [F_{\alpha\beta} - F_{\nu\beta}] q_i^\beta. \quad (4.1.38)$$

Considerando novamente o vínculo (2.4.11) na equação (4.1.32), encontra-se:

$$\frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{\beta=i}^{\nu-1} \beta_\alpha [G_{\alpha\beta} - G_{\alpha\nu}] J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu} H_{\alpha\beta} q_i^\beta, \quad (4.1.39)$$

Multiplicando (4.1.39) por  $(H^{-1})_{\gamma\alpha}$  e somando em  $\alpha$ , fica:

$$q_i^\gamma = \frac{5}{2} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (H^{-1})_{\gamma\alpha} T \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu-1} (H^{-1})_{\gamma\alpha} \beta_\alpha [G_{\alpha\beta} - G_{\alpha\nu}] J_i^\beta, \quad (4.1.40)$$

que pode ser substituída na equação (4.1.38) para levar a:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{\nu-1} (D^{-1})_{\alpha\beta} J_i^\beta &= T \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_\alpha - \mu_\nu}{T} \right) + \frac{F_i^\alpha - F_i^\nu}{T} \right] \\ &+ \left\{ \frac{5}{2} T^2 \left( \frac{k}{m_\alpha} - \frac{k}{m_\nu} \right) + T \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu} \beta_\gamma [F_{\alpha\gamma} - F_{\nu\gamma}] (H^{-1})_{\gamma\alpha} \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right), \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

com

$$\begin{aligned} (D^{-1})_{\alpha\beta} &= T \left\{ [A_{\alpha\beta} - A_{\nu\beta} - A_{\alpha\nu} + A_{\nu\nu}] \right. \\ &\left. - \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{\delta=1}^{\nu-1} \frac{2}{5} \beta_\gamma [F_{\alpha\gamma} - F_{\nu\gamma}] (H^{-1})_{\gamma\delta} \beta_\delta [G_{\delta\beta} - G_{\delta\nu}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

A equação (4.1.41) pode ser resolvida para o fluxo de difusão (multiplicando por  $D_{\epsilon\alpha}$  e somando em todos os valores de  $\alpha$ )

$$J_i^\epsilon = \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} D_{\epsilon\alpha} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_\alpha - \mu_\nu}{T} \right) + \frac{F_i^\alpha - F_i^\nu}{T} \right] + D_\epsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right), \quad (4.1.43)$$

onde

$$\begin{aligned} D_\epsilon &= \frac{5}{2} T \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} D_{\epsilon\alpha} \left( \frac{k}{m_\alpha} - \frac{k}{m_\nu} \right) \\ &+ \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} D_{\epsilon\alpha} [F_{\alpha\gamma} - F_{\nu\gamma}] (H^{-1})_{\gamma\beta} \beta_\gamma. \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Substituindo agora a equação (4.1.43) na (4.1.40), obtém-se o fluxo de calor parcial. O fluxo de calor total para uma teoria linearizada pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_{\gamma=1}^{\nu} q_i^{\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{\nu} \frac{5}{2} \frac{kT}{m_{\gamma}} J_i^{\gamma} \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\nu} q_i^{\gamma} + \sum_{\epsilon=1}^{\nu-1} \frac{5}{2} \left( \frac{k}{m_{\epsilon}} - \frac{k}{m_{\nu}} \right) T J_i^{\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

que neste caso vale:

$$q_i = \lambda' T^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right) + \sum_{\delta=1}^{\nu-1} D_{\delta}^* \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_{\delta} - \mu_{\nu}}{T} \right) + \frac{F_i^{\delta} - F_i^{\nu}}{T} \right], \quad (4.1.46)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{5}{2} \frac{1}{T} \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (H^{-1})_{\gamma\alpha} \\ &+ \frac{1}{T^2} \sum_{\epsilon=1}^{\nu-1} \left\{ \frac{5}{2} \left( \frac{k}{m_{\epsilon}} - \frac{k}{m_{\nu}} \right) T + \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (H^{-1})_{\gamma\alpha} \beta_{\alpha} [G_{\alpha\epsilon} - G_{\alpha\nu}] \right\} \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

e

$$\begin{aligned} D_{\delta}^* &= \frac{5}{2} T \sum_{\delta=1}^{\nu-1} D_{\epsilon\delta} \left( \frac{k}{m_{\epsilon}} - \frac{k}{m_{\nu}} \right) \\ &+ \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\epsilon=1}^{\nu-1} D_{\epsilon\delta} [G_{\alpha\epsilon} - G_{\alpha\nu}] (H^{-1})_{\gamma\alpha} \beta_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

Agora é possível identificar  $D_{\epsilon\alpha}$  com o coeficiente de difusão generalizado,  $D_{\epsilon}$  é o coeficiente de termo-difusão e  $D_{\epsilon}^*$  é o coeficiente do efeito de difusão-térmica.

Das equações (4.1.44) e (4.1.48) observa-se que:

$$D_{\epsilon} = D_{\epsilon}^*, \quad (4.1.49)$$

enquanto que da equação (4.1.42) é possível perceber que:

$$D_{\epsilon\alpha} = D_{\alpha\epsilon}. \quad (4.1.50)$$

As equações (4.1.49) e (4.1.50) são conhecidas como as relações de reciprocidade de Onsager [11].

Para concluir esta parte, é preciso obter o coeficiente de condutividade térmica,  $\lambda$ , definido como sendo o coeficiente de proporcionalidade entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura quando não há difusão ( $J_i^\alpha = 0$ ), ou seja:

$$\lambda = \frac{5}{2} \frac{1}{T} \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (H^{-1})_{\gamma\alpha}. \quad (4.1.51)$$

É importante ainda comentar que todas as equações constitutivas (para  $p_{ij}$ ,  $J_i^\alpha$  e  $q_i$ ) obtidas anteriormente são apresentadas em função das integrais  $\beta_{\alpha\beta}$ ,  $A_{\alpha\beta}$ ,  $G_{\alpha\beta}$  e  $H_{\alpha\beta}$ . Estas integrais podem ser encontradas na referência [1] em termos dos potenciais de colisão.

## 4.2) GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO ALTERNATIVO PARA MISTURAS

Uma descrição mais completa para misturas de gases monoatômicos é possível a partir da generalização do método alternativo, o que consiste em aumentar o número de campos básicos na expansão da função de distribuição .

Considerando o método de Grad o estado macroscópico de uma mistura de gases é caracterizado pelos momentos das funções de distribuição de cada espécie. Neste caso, para obter as aproximações sucessivas dos coeficientes de transporte podem ser utilizados os campos básicos da seção anterior, equações (4.1.2) a (4.1.4), acrescidos de:

$$p_{<ij>}^{\alpha(s)} = 15 \frac{2s!!}{(2s+5)!!} \int m_\alpha S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(s)} \xi_{<i>}^\alpha \xi_{>j>}^\alpha f_\alpha d\xi_\alpha \quad , \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.1)$$

$$q_i^{\alpha(s)} = -\frac{15}{2\beta_\alpha} \frac{2s!!}{(2s+3)!!} \int m_\alpha S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(s)} \xi_i^\alpha f_\alpha d\xi_\alpha \quad , \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.2)$$

onde  $p_{<ij>}^{\alpha(s)} = p_{ij}^{\alpha(s)} - \frac{1}{3} p_{rr}^{\alpha(s)} \delta_{ij}$  são tensores parciais sem traço e  $q_i^{\alpha(s)}$ , vetores parciais. Além disto,  $S_{l+\frac{1}{2}}^{\alpha(s)} \left( \frac{1}{2} \beta_\alpha \xi_\alpha^2 \right)$  são polinômios de Sonine (vide equação 3.4.6) e  $2s!! = 2^s s!$ .

Para uma teoria linearizada, desprezando-se os produtos das velocidades de difusão ( $u_i^\alpha = v_i^\alpha - v_i$ ), segue das equações (4.2.1) e (4.2.2) que:

$$p_{<ij>}^{\alpha(0)} = \int m_\alpha C_{<i}^\alpha C_{j>}^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha = p_{<ij>}^\alpha, \quad (4.2.3)$$

$$q_i^{\alpha(0)} = -\frac{5}{2} \frac{kT}{m_\alpha} \int m_\alpha \xi_i^\alpha f_\alpha d\xi_\alpha = -\frac{5}{2} \frac{kT}{m_\alpha} J_i^\alpha, \quad (4.2.4)$$

$$q_i^{\alpha(1)} = \int \frac{1}{2} m_\alpha C_\alpha^2 C_i^\alpha f_\alpha d\mathbf{c}_\alpha = q_i^\alpha. \quad (4.2.5)$$

Nas equações acima  $p_{<ij>}^\alpha$  é o deviante do tensor pressão;  $J_i^\alpha = \rho_\alpha u_i^\alpha$  é o fluxo de difusão e  $q_i^\alpha$  é o fluxo de calor do constituinte  $\alpha$  da mistura. Os tensores parciais sem traço de segunda ordem  $p_{<ij>}^{\alpha(s)}$  ( $s \neq 0$ ) e os vetores parciais  $q_i^{\alpha(s)}$  ( $s \neq 0, 1$ ) não possuem nomes próprios específicos.

Com base no método de Grad a função de distribuição é expandida em polinômios da velocidade peculiar  $\xi_i^\alpha$  em torno da função maxwelliana local com coeficientes relacionados aos momentos dados pelas equações (4.2.1) e (4.2.2), ou seja:

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(0)} \left[ 1 - \frac{2}{5} \frac{\beta_\alpha^2}{\rho_\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(s)} \xi_i^\alpha q_i^{\alpha(s)} + \frac{\beta_\alpha^2}{2\rho_\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(s)} \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha p_{<ij>}^{\alpha(s)} \right]. \quad (4.2.6)$$

De acordo com o método de Chapman-Enskog, substituindo  $f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(0)}(1 + \Phi_\alpha)$  na equação de Boltzmann (4.1.1) e desprezando-se os termos de segunda ordem e superiores é possível obter novamente a equação (4.1.11):

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x_i} + F_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial c_i^\alpha} = I_\alpha, \quad (4.2.7)$$

cujo lado direito pode ser escrito como:

$$I_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ I_{\alpha\beta} \left[ S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(s)} \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \right] \frac{\beta_\alpha^2}{2\rho_\alpha} p_{<ij>}^{\alpha(s)} + \left[ S_{\frac{5}{2}}^{\beta(s)} \xi_i^\beta \xi_j^\beta \right] \frac{\beta_\beta^2}{2\rho_\beta} p_{<ij>}^{\beta(s)} - \frac{2}{5} I_{\alpha\beta} \left[ S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(s)} \xi_i^\alpha \right] \frac{\beta_\alpha^2}{\rho_\alpha} q_i^{\alpha(s)} - \frac{2}{5} I_{\alpha\beta} \left[ S_{\frac{3}{2}}^{\beta(s)} \xi_i^\beta \right] \frac{\beta_\beta^2}{\rho_\beta} q_i^{\beta(s)} \right\}, \quad (4.2.8)$$

onde  $I_{\alpha\beta} [\Phi_\alpha]$  é dada por (4.1.13).

A partir das equações de balanço para um fluido de Euler, equações (4.1.14) a (4.1.16), elimina-se as derivadas temporais de  $\rho_\alpha$ ,  $v_i$  e  $T$  na equação (4.2.7), o que resulta em:

$$f_\alpha^{(0)} \left[ \frac{n}{n_\alpha} S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(0)} \xi_k^\alpha d_k^\alpha - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(1)} \xi_k^\alpha + \beta_\alpha S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(0)} \xi_k^\alpha \xi_l^\alpha \frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}} \right] = I_\alpha, \quad (4.2.9)$$

onde  $d_i^\alpha$  representa a força de difusão generalizada definida por (4.1.18).

A multiplicação da equação (4.2.9) por  $\beta_\alpha S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(r)} \xi_{<i}^\alpha \xi_{j>}^\alpha$  e integração sobre todos os valores de  $\xi_\alpha$  resulta em:

$$-2\delta^{(0,r)} \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \beta_{\alpha\beta}^{(r,s)} p_{<ij>}^{\beta(s)}, \quad (4.2.10)$$

onde  $\delta^{(0,r)}$  é o delta de Kronecker,

$$\beta_{\alpha\beta}^{(r,s)} = -\frac{kT\beta_\alpha^2\beta_\beta^2}{10\rho_\alpha\rho_\beta} \int S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(r)} \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ S_{\frac{5}{2}}^{\beta(s)} \xi_{<p}^\beta \xi_{q>}^\beta \right] d\xi_\alpha \quad \alpha \neq \beta \quad (4.2.11)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha\alpha}^{(r,s)} = & -\frac{kt\beta_\alpha^4}{10\rho_\alpha^2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(r)} \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(s)} \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha \right] \right. \\ & \left. + \int S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(r)} \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\alpha} \left[ S_{\frac{5}{2}}^{\alpha(s)} \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha \right] d\xi_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Nas equações (4.2.11) e (4.2.12) fez-se uso da relação

$$I_{<ij>kl} p_{<kl>} = \left\{ \frac{1}{5} \int \xi_{<r} \xi_{s>} I[\xi_{<r} \xi_{s>}] d\xi \right\} p_{<ij>}. \quad (4.2.13)$$

Ainda da equação (4.2.11) observa-se a seguinte simetria:

$$\beta_{\alpha\beta}^{(r,s)} = \beta_{\beta\alpha}^{(s,r)}. \quad (4.2.14)$$



A partir do cálculo das integrais  $\beta_{\alpha\beta}^{(r,s)}$ , a equação constitutiva para a pressão parcial  $p_{<ij>}^\alpha$  pode ser obtida a partir da equação (4.2.10), levando em conta aproximações sucessivas. A equação constitutiva numa teoria linearizada (Lei de Navier-Stokes) para a pressão da mistura,  $p_{<ij>}$ , é dada por  $p_{<ij>} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p_{<ij>}^\alpha$ .

Multiplicando, agora, a equação (4.2.9) por  $\beta_\alpha S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(r)} \xi_i^\alpha$  e procedendo a integração sobre todos os valores de  $\xi_\alpha$ , segue que:

$$-\frac{p}{\rho_\alpha} \delta^{(r,0)} d_i^\alpha + \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{1}{\beta_\alpha} \delta^{(r,1)} = - \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \alpha_{\alpha\beta}^{(r,s)} q_i^{\beta(s)}, \quad (4.2.15)$$

onde utilizou-se, à direita da igualdade, o fato de que

$$\int \xi_i \xi_k f(\xi^2) d\xi = \frac{1}{3} \delta_{ik} \int \xi^2 f(\xi^2) d\xi \quad (4.2.16)$$

e

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(r,s)} = -\frac{1}{3} \frac{\beta_\alpha \beta_\beta k T}{\rho_\alpha \rho_\beta} \int S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(r)} \xi_k^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ S_{\frac{3}{2}}^{\beta(s)} \xi_k^\beta \right] d\xi_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \quad (4.2.17)$$

$$\alpha_{\alpha\alpha}^{(r,s)} = -\frac{1}{3} \frac{\beta_\alpha^2 k T}{\rho_\alpha^2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(r)} \xi_k^\alpha I_{\alpha\beta} \left[ S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(s)} \xi_k^\alpha \right] d\xi_\alpha + S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(r)} \xi_k^\alpha I_{\alpha\alpha} \left[ S_{\frac{3}{2}}^{\alpha(s)} \xi_k^\alpha \right] d\xi_\alpha \right\}; \quad (4.2.18)$$

sendo válida a seguinte relação de simetria:

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(r,s)} = \alpha_{\beta\alpha}^{(s,r)}. \quad (4.2.19)$$

A equação (4.2.15) pode ser desdobrada em outras duas equações e para isto considera-se  $r = 0$  e  $r \neq 0$ . Quando  $r = 0$ , as  $\nu$  equações não são linearmente independentes conforme mostra a equação (4.1.20). Então, utilizando o vínculo dado pela equação (2.4.11) é possível escrever, a partir da equação (4.2.15) com  $r = 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{p}{\rho_\alpha} d_i^\alpha &= \sum_{\beta=1}^{\nu} \alpha_{\alpha\beta}^{(0,0)} J_i^\beta - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \alpha_{\alpha\beta}^{(0,s)} q_i^{\beta(s)} \\ &= \sum_{\beta=1}^{\nu-1} \left[ \alpha_{\alpha\beta}^{(0,0)} - \alpha_{\alpha\nu}^{(0,0)} \right] J_i^\beta - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \alpha_{\alpha\beta}^{(0,s)} q_i^{\beta(s)}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

A partir da equação (4.2.20), subtraindo a  $\nu$ -ésima da  $\alpha$ -ésima equação obtém-se as seguintes  $\nu - 1$  equações linearmente independentes:

$$\begin{aligned} -p \left( \frac{d_i^\alpha}{\rho_\alpha} - \frac{d_i^\nu}{\rho_\nu} \right) &= \sum_{\beta=1}^{\nu-1} \left[ \alpha_{\alpha\beta}^{(0,0)} - \alpha_{\nu\beta}^{(0,0)} - \alpha_{\alpha\nu}^{(0,0)} + \alpha_{\nu\nu}^{(0,0)} \right] J_i^\beta - \\ &\quad - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \left[ \alpha_{\alpha\beta}^{(0,s)} - \alpha_{\nu\beta}^{(0,s)} \right] q_i^{\beta(s)} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

e utilizando a equação (4.1.19),

$$\begin{aligned} -p \left( \frac{d_i^\alpha}{\rho_\alpha} - \frac{d_i^\nu}{\rho_\nu} \right) &= T \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_\alpha - \mu_\nu}{T} \right) + \frac{F_i^\alpha - F_i^\nu}{T} \right] + \\ &\quad + \frac{5}{2} T^2 \left( \frac{k}{m_\alpha} - \frac{k}{m_\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right) \\ &= \sum_{\beta=1}^{\nu-1} \left[ \alpha_{\alpha\beta}^{(0,0)} - \alpha_{\nu\beta}^{(0,0)} - \alpha_{\alpha\nu}^{(0,0)} + \alpha_{\nu\nu}^{(0,0)} \right] J_i^\beta - \\ &\quad - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \left[ \alpha_{\alpha\beta}^{(0,s)} - \alpha_{\nu\beta}^{(0,s)} \right] q_i^{\beta(s)}. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Para  $r \neq 0$  e utilizando-se as equações (4.2.4) e (2.4.11), a equação (4.2.15) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{1}{\beta_\alpha} \delta^{(r,1)} &= - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \alpha_{\alpha\beta}^{(r,0)} q_i^{\beta(0)} - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \alpha_{\alpha\beta}^{(r,s)} q_i^{\beta(s)} \\ &= \sum_{\beta=1}^{\nu-1} \left[ \alpha_{\alpha\beta}^{(r,0)} - \alpha_{\alpha\nu}^{(r,0)} \right] J_i^\beta - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta \alpha_{\alpha\beta}^{(r,s)} q_i^{\beta(s)}. \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Conhecidas as integrais  $\alpha_{\alpha\beta}^{(r,s)}$  pode-se determinar as equações constitutivas para o fluxo de calor ( $q_i^\alpha$ ) e para o fluxo de difusão ( $J_i^\alpha$ ) do constituinte  $\alpha$  da mistura. O fluxo de calor total ( $q_i$ ), numa teoria linearizada, pode ser escrito como  $q_i = \sum_{\alpha}^{\nu} \left( q_i^\alpha + \frac{5}{2} \frac{kT}{m_\alpha} J_i^\alpha \right)$ .

A partir das equações (4.2.23) e (4.2.24) em primeira aproximação resultam as equações (4.1.38) e (4.1.39) já resolvidas na seção (4.1), onde podem ser feitas as equivalências entre os coeficientes:

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(0,0)} = A_{\alpha\beta},$$

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(0,1)} = F_{\alpha\beta},$$

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(1,0)} = G_{\alpha\beta},$$

$$\alpha_{\alpha\beta}^{(1,1)} = \frac{5}{2} \frac{1}{\beta_{\alpha}\beta_{\beta}} H_{\alpha\beta},$$

que relacionam as integrais (4.1.28) a (4.1.31) e (4.1.33) a (4.1.36) às integrais (4.2.17) e (4.2.18).

Para o cálculo do tensor pressão utiliza-se a equação (4.2.10) que, em primeira aproximação, reduz-se à equação (4.1.25), a qual implica na primeira aproximação do coeficiente de viscosidade de cisalhamento (4.1.26).

## 5 O MÉTODO ALTERNATIVO PARA GASES IONIZADOS

O objetivo deste capítulo é aplicar o método alternativo para um gás ionizado cuja dinâmica é governada pelas interações das partículas com os campos internos produzidos por elas mesmas e com os campos externos aplicados. À medida em que as partículas carregadas se movem, elas geram concentrações de carga positiva ou negativa que resultam em campos elétricos. Este movimento também pode ser responsável por correntes elétricas e campos magnéticos.

A interação das partículas carregadas com os campos eletromagnéticos é dada pela força de Lorentz  $\mathbf{F}^\alpha$  tal que, no sistema de unidades MKSA:

$$\mathbf{F}_i^\alpha = e_\alpha [\mathbf{E}_i + (\mathbf{c}_\alpha \times \mathbf{B})_i], \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{F}_i^\alpha$  representa a força a que uma carga elétrica do gás está sujeita quando se move com velocidade  $\mathbf{c}_\alpha$  na presença de campos resultantes elétrico  $\mathbf{E}$  e indução magnética  $\mathbf{B}$ ; a carga do constituinte  $\alpha$  é denotada por  $e_\alpha$ .

Para que seja possível explicar e prever diversos fenômenos macroscópicos considera-se que as propriedades macroscópicas do gás ionizado são devidas a médias associadas ao comportamento coletivo de um grande número de partículas. Sendo assim pode ser adotado um tratamento estatístico a partir da teoria cinética dos gases, considerando a equação de Boltzmann [12] e [13].

Então, denota-se por  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{c}_\alpha$  a posição e a velocidade, respectivamente, de uma partícula do constituinte  $\alpha$  da mistura ( $\alpha = 1, 2, \dots, \nu$ ). O estado desta mistura é caracterizado pelo conjunto das funções de distribuição de cada constituinte

$$f_\alpha = f(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu)$$

de tal forma que  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha, t) d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha$  forneça no tempo  $t$  o número de partículas  $\alpha$  no elemento de volume  $d\mathbf{x} d\mathbf{c}_\alpha$  com coordenadas entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  e entre  $\mathbf{c}_\alpha$  e  $\mathbf{c}_\alpha + d\mathbf{c}_\alpha$ .

A função de distribuição para a espécie  $\alpha$ ,  $f_\alpha$ , obedece à equação de Boltzmann:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_i^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [E_i + (\mathbf{c}_\alpha \times \mathbf{B})_i] \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_i^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \int (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) g^{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{c}_\beta. \quad (5.2)$$

Na equação de Boltzmann, o termo  $\frac{e_\alpha}{m_\alpha} [E_i + (\mathbf{c}_\alpha \times \mathbf{B})_i]$  representa a força de Lorentz por unidade de massa a que uma carga elétrica do gás está sujeita.

Considerando o método de Grad o estado macroscópico do gás ionizado pode ser caracterizado pelos momentos das funções de distribuição de cada espécie. Sendo assim, utiliza-se o conjunto das equações (4.1.2) a (4.1.7).

Para aplicar o método alternativo inicia-se expandindo a função de distribuição em polinômios da velocidade peculiar  $\xi_i^\alpha = c_i^\alpha - v_i$  em torno da função de distribuição de Maxwell, equação (4.1.9), cujos coeficientes estão relacionados aos momentos (4.1.5) a (4.1.7), ou seja:

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(0)} \left\{ 1 + \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} \xi_i^\alpha J_i^\alpha + \frac{\beta_\alpha^2}{2\rho_\alpha} \left[ \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha p_{<ij>}^\alpha + \frac{4}{5} \xi_i^\alpha q_i^\alpha \left( \frac{\beta_\alpha \xi_\alpha^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \right] \right\}, \quad (5.3)$$

que equivale à equação (4.1.8).

Agora, de acordo com o método de Chapman-Enskog, substituindo  $f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(1)} = f_\alpha^{(0)}(1 + \Phi_\alpha)$  na equação de Boltzmann (5.2) e desprezando-se os termos de segunda ordem e superiores (associados a produtos das velocidades peculiares  $\xi_i^\alpha$ ), é possível obter:

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t} + (\xi_i^\alpha + v_i) \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Xi_i \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial c_i^\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\xi^\alpha \times \mathbf{B})_i f_\alpha^{(0)} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial c_i^\alpha} = I_\alpha, \quad (5.4)$$

onde considera-se, além das derivadas de  $f_\alpha^{(0)}$ , o termo  $\frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\xi^\alpha \times \mathbf{B})_i f_\alpha^{(0)} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial c_i^\alpha}$  que poderá ser significativo para velocidades das partículas e induções magnéticas grandes. Define-se também o campo auxiliar

$$\Xi_i = E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k. \quad (5.5)$$

Quanto à integral  $I_\alpha$ , esta resulta da substituição da função de distribuição de Grad no lado direito da equação de Boltzmann, desprezando-se os termos não lineares, e pode ser escrita da mesma forma que a (4.1.12):

$$\begin{aligned}
 I_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} \left\{ I_{\alpha\beta} [\xi_i^\alpha \xi_j^\alpha] \frac{\beta_\alpha^2}{2\rho_\alpha} p_{<ij>}^\alpha + I_{\alpha\beta} [\xi_i^\beta \xi_j^\beta] \frac{\beta_\beta^2}{2\rho_\beta} p_{<ij>}^\beta \right. \\
 \left. + I_{\alpha\beta} [\xi_i^\alpha] \frac{\beta_\alpha}{\rho_\alpha} J_i^\alpha + I_{\alpha\beta} [\xi_i^\beta] \frac{\beta_\beta}{\rho_\beta} J_i^\beta \right. \\
 \left. + \frac{2}{5} I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_i^\alpha \right] \frac{\beta_\alpha^2}{\rho_\alpha} q_i^\alpha + \frac{2}{5} I_{\alpha\beta} \left[ \left( \frac{m_\beta \xi_\beta^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_i^\beta \right] \frac{\beta_\beta^2}{\rho_\beta} q_i^\beta \right\}. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas da maxwelliana e as derivadas do desvio  $\Phi_\alpha$  (escrito a partir da equação 5.3) na equação (5.4) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 f_\alpha^{(0)} \left\{ \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m_\alpha \xi_i^\alpha}{kT} \frac{\partial v_i}{\partial t} \right. \\
 \left. + (\xi_i^\alpha + v_i) \left[ \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x_i} + \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{m_\alpha}{kT} \xi_s \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \right] \right. \\
 \left. - \frac{m_\alpha}{kT} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Xi_r \xi_r^\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\xi^\alpha \times \mathbf{B})_i \left\{ \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{m_\alpha}{kT} J_i^\alpha + \frac{1}{\rho_\alpha} \left( \frac{m_\alpha}{kT} \right)^2 p_{<ij>}^\alpha \xi_j^\alpha \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{2}{5} \frac{1}{\rho_\alpha} \left( \frac{m_\alpha}{kT} \right)^2 \left( \frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) q_i^\alpha \right\} \right\} = I_\alpha. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (5.7) por  $m_\alpha$ ,  $m_\alpha c_i^\alpha$  e  $\frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2}$ , integrando em todas as velocidades e somando-se as duas últimas em todos os constituintes, obtém-se as equações :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\alpha v_i}{\partial x_i} = 0; \quad (5.8)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho v_r \frac{\partial v_i}{\partial x_r} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \rho_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Xi_i + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{J}^\alpha \times \mathbf{B})_i; \quad (5.9)$$

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial x_r} \right) + T \frac{\partial v_r}{\partial x_r} = 0, \quad (5.10)$$

que podem ser utilizadas para eliminar as derivadas temporais da equação (5.7) o que leva a:

$$f_{\alpha}^{(0)} \left\{ \beta_{\alpha} \xi_k^{\alpha} \left[ \frac{1}{\rho_{\alpha}} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \left( \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{\rho_{\beta} e_{\beta}}{\rho m_{\beta}} - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right) \Xi_k \right] + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} \xi_k \left( \frac{\beta_{\alpha} \xi_{\alpha}^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \right. \\ \left. + \beta_{\alpha} \xi_k^{\alpha} \xi_l^{\alpha} \frac{\partial v_{<k}}{\partial x_{l>}} + \frac{\beta_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \xi_k^{\alpha} \left[ \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{e_{\beta}}{m_{\beta}} (\mathbf{J}^{\beta} \times \mathbf{B})_k - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{J}^{\alpha} \times \mathbf{B})_k \right] \right. \\ \left. + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\xi^{\alpha} \times \mathbf{B})_k \frac{\beta_{\alpha}^2}{\rho_{\alpha}} \left[ \xi_l^{\alpha} p_{<kl>}^{\alpha} + \frac{2}{5} q_k^{\alpha} \left( \frac{\beta_{\alpha} \xi_{\alpha}^2}{2} - \frac{5}{2} \right) \right] \right\} = I_{\alpha}. \quad (5.11)$$

A multiplicação da equação (5.11) por  $\frac{\beta_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \xi^{\alpha}$  e sua integração em  $\xi_{\alpha}$  conduz

a:

$$-\frac{p}{\rho_{\alpha}} d_i^{\alpha} - \left[ \frac{1}{\rho} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{e_{\beta}}{m_{\beta}} (\mathbf{J}^{\beta} \times \mathbf{B})_i - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{\rho} (\mathbf{J}^{\alpha} \times \mathbf{B})_i \right] = \sum_{\beta=1}^{\nu} A_{\alpha\beta} J_i^{\beta} - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_{\beta} F_{\alpha\beta} q_i^{\beta}, \quad (5.12)$$

onde  $A_{\alpha\beta}$  e  $F_{\alpha\beta}$  são dados pelas equações (4.1.28) a (4.1.31) e  $d_i^{\alpha}$  representa a força de difusão generalizada definida por:

$$d_i^{\alpha} = \frac{1}{p} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x_i} - \frac{\rho_{\alpha}}{p\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \Xi_i \left[ \frac{\rho_{\alpha}}{p} \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{\rho_{\beta}}{\rho} \frac{e_{\beta}}{m_{\beta}} - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\rho_{\alpha}}{p} \right]. \quad (5.13)$$

Multiplicando a equação (5.11) por  $\frac{\beta_{\alpha}^2}{\rho_{\alpha}} \left( \frac{m_{\alpha} \xi_{\alpha}^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \xi_i^{\alpha}$  e integrando sobre todas as velocidades, encontra-se:

$$\frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \left( \frac{m_{\alpha}}{kT} \right)^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{q}^{\alpha})_i \\ = \sum_{\beta=i}^{\nu} \beta_{\alpha} G_{\alpha\beta} J_i^{\beta} - \sum_{\beta=1}^{\nu} H_{\alpha\beta} q_i^{\beta} = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} \beta_{\alpha} (F_{\beta\alpha} - F_{\nu\alpha}) J_i^{\beta} - \sum_{\beta=1}^{\nu} H_{\alpha\beta} q_i^{\beta}, \quad (5.14)$$

onde  $G_{\alpha\beta}$  e  $H_{\alpha\beta}$  são dados pelas equações (4.1.33) a (4.1.36).

A partir da (5.12), subtraindo-se a  $\alpha$ -ésima da  $\nu$ -ésima equação, encontra-se:

$$-p \left( \frac{d_i^{\alpha}}{\rho_{\alpha}} - \frac{d_i^{\nu}}{\rho_{\nu}} \right) + \frac{1}{\rho_{\alpha}} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{J}^{\alpha} \times \mathbf{B})_i - \frac{1}{\rho_{\nu}} \frac{e_{\nu}}{m_{\nu}} (\mathbf{J}^{\nu} \times \mathbf{B})_i$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\nu-1} (A_{\alpha\beta} - A_{\nu\beta} - A_{\alpha\nu} + A_{\nu\nu}) J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta (F_{\alpha\beta} - F_{\nu\beta}) q_i^\beta, \quad (5.15)$$

que com o auxílio da equação (5.13) escrita em forma semelhante à (4.1.19) transforma-se em:

$$\begin{aligned} T \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_\alpha - \mu_\nu}{T} \right) + \frac{\Xi_i}{T} \left( \frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \frac{e_\nu}{m_\nu} \right) \right] + \frac{5}{2} T^2 \left( \frac{k}{m_\alpha} - \frac{k}{m_\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right) \\ + \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{J}^\alpha \times \mathbf{B})_i - \frac{1}{\rho_\nu} \frac{e_\nu}{m_\nu} (\mathbf{J}^\nu \times \mathbf{B})_i \\ = \sum_{\beta=1}^{\nu-1} (A_{\alpha\beta} - A_{\nu\beta} - A_{\alpha\nu} + A_{\nu\nu}) J_i^\beta - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{2}{5} \beta_\beta (F_{\alpha\beta} - F_{\nu\beta}) q_i^\beta. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Resolvendo as equações (5.14) e (5.16) para o fluxo de calor  $q_i^\alpha$  e para o fluxo de difusão  $J_i^\alpha$ , é possível obter também as equações constitutivas para o fluxo de calor  $q_i$  e para a corrente elétrica total  $J_i$  da mistura a partir de:

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left( q_i^\alpha + \frac{5}{2} \frac{k}{m_\alpha} T J_i^\alpha \right), \quad (5.17)$$

e

$$J_i = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} J_i^\alpha. \quad (5.18)$$

Restringindo os cálculos para uma mistura binária,  $\alpha = I$  e  $\alpha = E$ , onde  $I$  representa os íons e  $E$  os elétrons, a equação (5.16) implica em:

$$\begin{aligned} T \frac{e_E m_I - e_I m_E}{m_I m_E} \left[ \frac{\Xi_i}{T} - \frac{m_I m_E}{e_E m_I - e_I m_E} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_E - \mu_I}{T} \right) \right] + \frac{5}{2} T^2 k \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{T} \right) \\ + \frac{e_E \rho_I m_I + e_I \rho_E m_E}{\rho_E \rho_I (e_E m_I - e_I m_E)} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i = (A_{EE} - A_{IE} - A_{EI} + A_{II}) \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i \\ - \frac{2}{5} \beta_E (F_{EE} - F_{IE}) q_i^E - \frac{2}{5} \beta_I (F_{EI} - F_{II}) q_i^I, \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde foi utilizada a relação  $J_i^E = \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i$  obtida a partir da definição da densidade de corrente total (5.18).



A equação (5.14) escrita para os dois constituintes conduz às seguintes relações , quando  $\alpha = E$  e  $\alpha = I$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{e_E}{m_E} \frac{1}{\rho_E} \left( \frac{m_E}{kT} \right)^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{q}^E)_i \\ &= \beta_E (F_{EE} - F_{IE}) \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i - H_{EE} q_i^E - H_{EI} q_i^I \end{aligned} \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{e_I}{m_I} \frac{1}{\rho_I} \left( \frac{m_I}{kT} \right)^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{q}^I)_i \\ &= \beta_I (F_{EI} - F_{II}) \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i - H_{IE} q_i^E - H_{II} q_i^I \end{aligned} \quad (5.21)$$

As equações (5.19) a (5.21) constituem um sistema com três variáveis ( $q_i^E$ ,  $q_i^I$  e  $J_i$ ) que pode ser simplificado para ser resolvido. Sabendo que a massa do elétron é muito menor que a massa do íon,  $m_E \ll m_I$ , pode-se desprezar os termos onde aparecem  $F_{EI}$ ,  $F_{IE}$  e  $H_{IE} = H_{EI}$ . Isto é mostrado no apêndice A, onde são calculadas as integrais  $F_{\alpha\beta}$  e  $H_{\alpha\beta}$ . Sendo assim, as equações (5.20) e (5.21) podem ser escritas como:

$$Q_{ij}^E q_j^E = \beta_E F_{EE} \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i - \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (5.22)$$

e

$$Q_{ij}^I q_j^I = \beta_I F_{II} \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i - \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (5.23)$$

onde

$$Q_{ij}^E = H_{EE} \delta_{ij} + \frac{e_E}{m_E} \frac{1}{\rho_E} \left( \frac{m_E}{kT} \right)^2 \epsilon_{ijk} B_k \quad (5.24)$$

e

$$Q_{ij}^I = H_{II} \delta_{ij} + \frac{e_I}{m_I} \frac{1}{\rho_I} \left( \frac{m_I}{kT} \right)^2 \epsilon_{ijk} B_k. \quad (5.25)$$

Para obter os valores dos fluxos de calor parciais é preciso conhecer os inversos de  $Q_{ij}^E$  e  $Q_{ij}^I$  que podem ser calculados sabendo-se que para um tensor da forma

$S_{ij} = a\delta_{ij} + b\epsilon_{ijk}B_k + cB_iB_j$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, vale a seguinte relação deduzida a partir do teorema de Cayley-Hamilton (vide apêndice B):

$$(S^{-1})_{ij} = \frac{1}{III} [a(a + cB^2)\delta_{ij} - b(a + cB^2)\epsilon_{ijk}B_k + (b^2 - ac)B_iB_j], \quad (5.26)$$

onde

$$III = (a^2 + b^2B^2)(a + cB^2). \quad (5.27)$$

Com o auxílio da equação (5.26), as equações (5.22) e (5.23) podem ser resolvidas implicando em:

$$q_i^E = (Q_E^{-1})_{ij} \left[ \beta_E F_{EE} \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i - \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (5.28)$$

e

$$q_i^I = (Q_I^{-1})_{ij} \left[ \beta_I F_{II} \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} J_i - \frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right], \quad (5.29)$$

onde

$$(Q_E^{-1})_{ij} = \frac{1}{III_E} \left\{ H_{EE}^2 \delta_{ij} + \frac{e_E}{m_E} \frac{1}{\rho_E} \left( \frac{m_E}{kT} \right)^2 H_{EE} \epsilon_{ijk} B_k + \left[ \frac{e_E}{m_E} \frac{1}{\rho_E} \left( \frac{m_E}{kT} \right)^2 \right]^2 B_i B_j \right\}, \quad (5.30)$$

$$(Q_I^{-1})_{ij} = \frac{1}{III_I} \left\{ H_{II}^2 \delta_{ij} + \frac{e_I}{m_I} \frac{1}{\rho_I} \left( \frac{m_I}{kT} \right)^2 H_{II} \epsilon_{ijk} B_k + \left[ \frac{e_I}{m_I} \frac{1}{\rho_I} \left( \frac{m_I}{kT} \right)^2 \right]^2 B_i B_j \right\}, \quad (5.31)$$

$$III_E = H_{EE}^3 + H_{EE} \left( \frac{e_E}{m_E} \frac{1}{\rho_E} \beta_E^2 \right)^2 B^2 \quad (5.32)$$

e

$$III_I = H_{II}^3 + H_{II} \left( \frac{e_I}{m_I} \frac{1}{\rho_I} \beta_I^2 \right)^2 B^2. \quad (5.33)$$

Agora é possível substituir os valores de  $q_i^E$  e  $q_i^I$  na equação (5.19) para calcular  $J_i$ . Após algumas manipulações algébricas e uma inversão de matriz empregando a equação (5.26), encontra-se:

$$J_i = (R^{-1})_{ij} \left[ T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_E - \mu_I}{T} \right) - \frac{e_E m_I - e_I m_E}{m_I m_E} \Xi_j \right]$$

$$+\frac{5}{2} (R^{-1})_{ij} \left[ \beta_E F_{EE} (Q_E^{-1})_{jk} - \beta_I F_{II} (Q_I^{-1})_{jk} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{jk} \right] \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (5.34)$$

onde

$$\begin{aligned} (R^{-1})_{ij} = & \frac{1}{III_{I,J}} \left( \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\beta_E^2 F_{EE}^2 H_{EE}^2}{III_E} + \frac{\beta_I^2 F_{II}^2 H_{II}^2}{III_I} - \frac{5}{2} A_{EE} \right) \right. \\ & \times \left( \frac{\beta_E^2 F_{EE}^2 H_{EE}^2}{III_E} + \frac{\beta_I^2 F_{II}^2 H_{II}^2}{III_I} - \frac{5}{2} A_{EE} + \frac{\beta_E^6 F_{EE}^2 e_E^2 B^2}{III_E m_E^2 \rho_E^2} + \frac{\beta_I^6 F_{II}^2 e_I^2 B^2}{III_I m_I^2 \rho_I^2} \right) \delta_{ij} \\ & - \left( \frac{\beta_E^4 e_E F_{EE}^2 H_{EE}}{\rho_E m_E III_E} + \frac{\beta_I^4 e_I F_{II}^2 H_{II}}{\rho_I m_I III_I} + \frac{5}{2} \frac{e_E \rho_I m_I + e_I \rho_E m_E}{\rho_I \rho_E m_I m_E} \right) \\ & \times \left( \frac{\beta_E^2 F_{EE}^2 H_{EE}^2}{III_E} + \frac{\beta_I^2 F_{II}^2 H_{II}^2}{III_I} - \frac{5}{2} A_{EE} + \frac{\beta_E^6 F_{EE}^2 e_E^2 B^2}{III_E m_E^2 \rho_E^2} + \frac{\beta_I^6 F_{II}^2 e_I^2 B^2}{III_I m_I^2 \rho_I^2} \right) \epsilon_{ijk} B_k \\ & + \left\{ \left( \frac{\beta_E^4 e_E F_{EE}^2 H_{EE}}{\rho_E m_E III_E} + \frac{\beta_I^4 e_I F_{II}^2 H_{II}}{\rho_I m_I III_I} + \frac{5}{2} \frac{e_E \rho_I m_I + e_I \rho_E m_E}{\rho_I \rho_E m_I m_E} \right)^2 \right. \\ & \left. - \left( \frac{\beta_E^2 F_{EE}^2 H_{EE}^2}{III_E} + \frac{\beta_I^2 F_{II}^2 H_{II}^2}{III_I} - \frac{5}{2} A_{EE} \right) \left( \frac{\beta_E^6 F_{EE}^2 e_E^2}{III_E m_E^2 \rho_E^2} + \frac{\beta_I^6 F_{II}^2 e_I^2}{III_I m_I^2 \rho_I^2} \right) \right\} B_i B_j \Bigg\}, \quad (5.35) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} III_{I,J} = & \left( \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} \right)^3 \left\{ \left\{ \left( \frac{\beta_E^2 F_{EE}^2 H_{EE}^2}{III_E} + \frac{\beta_I^2 F_{II}^2 H_{II}^2}{III_I} - \frac{5}{2} A_{EE} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. + \left( \frac{\beta_E^4 e_E F_{EE}^2 H_{EE}}{\rho_E m_E III_E} + \frac{\beta_I^4 e_I F_{II}^2 H_{II}}{\rho_I m_I III_I} + \frac{5}{2} \frac{e_E \rho_I m_I + e_I \rho_E m_E}{\rho_I \rho_E m_E m_I} \right)^2 B^2 \right\} \\ & \times \left[ \left( \frac{\beta_E^2 F_{EE}^2 H_{EE}^2}{III_E} + \frac{\beta_I^2 F_{II}^2 H_{II}^2}{III_I} - \frac{5}{2} A_{EE} \right) + \left( \frac{\beta_E^6 F_{EE}^2 e_E^2}{III_E m_E^2 \rho_E^2} + \frac{\beta_I^6 F_{II}^2 e_I^2}{III_I m_I^2 \rho_I^2} \right) B^2 \right] \Bigg\}. \quad (5.36) \end{aligned}$$

Agora que se conhece  $J_i$  basta substituir seu valor nas equações (5.28) e (5.29) para determinar  $q_i^E$  e  $q_i^I$ . Com estes valores pode-se encontrar o fluxo de calor total para uma teoria linearizada (5.17), dado por:

$$q_i = q_i^E + q_i^I + \frac{5}{2} \left( \frac{m_I - m_E}{m_I e_I - m_E e_I} \right) k T J_i, \quad (5.37)$$

ou

$$q_i = \frac{5}{2} \left[ \beta_E F_{EE} (Q_E^{-1})_{ij} - \beta_I F_{II} (Q_I^{-1})_{ij} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{ij} \right] (R^{-1})_{jk}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} T \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mu_E - \mu_I}{T} \right) - \Xi_k \right] + \frac{5}{2} \left\{ \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} \right. \\
& \times \left[ \beta_{EE} F_{EE} (Q_E^{-1})_{ij} - \beta_{II} F_{II} (Q_I^{-1})_{ij} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{ij} \right] (R^{-1})_{jk} \\
& \times \left[ \beta_{EE} F_{EE} (Q_E^{-1})_{kl} - \beta_{II} F_{II} (Q_I^{-1})_{kl} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{kl} \right] - (Q_E^{-1})_{il} - (Q_I^{-1})_{il} \left. \right\} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_l}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

As equações para  $J_i$  e  $q_i$ , que representam as leis de Ohm e Fourier respectivamente podem ser reescritas assim:

$$J_i = -\sigma_{ij} \left[ \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_E - \mu_I}{T} \right) - \Xi_j \right] - Q_{ij}^J \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{5.39}$$

e

$$q_i = -K_{ij} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} - Q_{ij}^q \left[ \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_E - \mu_I}{T} \right) - \Xi_j \right], \tag{5.40}$$

onde

$$\sigma_{ij} = - (R^{-1})_{ij} \left( \frac{e_E m_I - e_I m_E}{m_I m_E} \right), \tag{5.41}$$

$$Q_{ij}^J = -\frac{5}{2} (R^{-1})_{ik} \left[ \beta_E F_{EE} (Q_E^{-1})_{kj} - \beta_I F_{II} (Q_I^{-1})_{kj} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{kj} \right], \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij} = & -\frac{5}{2} \left\{ \frac{m_E m_I}{e_E m_I - e_I m_E} \left[ \beta_{EE} F_{EE} (Q_E^{-1})_{il} - \beta_{II} F_{II} (Q_I^{-1})_{il} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{il} \right] \right. \\
& \times (R^{-1})_{lk} \left[ \beta_{EE} F_{EE} (Q_E^{-1})_{kj} - \beta_{II} F_{II} (Q_I^{-1})_{kj} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{kj} \right] \\
& \left. - (Q_E^{-1})_{ij} - (Q_I^{-1})_{ij} \right\},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$Q_{ij}^q = -\frac{5}{2} \left[ \beta_E F_{EE} (Q_E^{-1})_{ik} - \beta_I F_{II} (Q_I^{-1})_{ik} + \frac{5}{2} \frac{m_I - m_E}{m_I m_E} k T \delta_{ik} \right] (R^{-1})_{kj}. \tag{5.44}$$

Nas equações acima  $\sigma_{ij}$  representa o *tensor condutividade elétrica*;  $K_{ij}$  é o *tensor condutividade térmica*;  $Q_{ij}^J$  e  $Q_{ij}^q$  estão relacionados aos efeitos cruzados de

termo-difusão e difusão-térmica. A partir destes coeficientes é possível verificar as relações de Onsager [11] que neste caso são dadas por:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{B}) = \sigma_{ji}(-\mathbf{B}), \quad K_{ij}(\mathbf{B}) = K_{ji}(-\mathbf{B}) \quad (5.45)$$

e

$$Q_{ij}^I(\mathbf{B}) = Q_{ji}^I(-\mathbf{B}) = Q_{ij}^I(\mathbf{B}) = Q_{ji}^I(-\mathbf{B}). \quad (5.46)$$

Para completar a teoria é preciso encontrar o coeficiente de viscosidade. Isto será possível se a equação (5.11) for multiplicada por  $\beta_\alpha \xi_{<i} \xi_{j>}$  e integrada em todas as velocidades, então:

$$2 \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{kT} (\epsilon_{riq} B_q p_{<rj>}^\alpha + \epsilon_{rjq} B_q p_{<ri>}^\alpha) = - \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha} K_{\alpha\beta} p_{<ij>}^\beta, \quad (5.47)$$

onde

$$K_{\alpha\beta} = - \frac{kT \beta_\alpha^2 \beta_\beta^2}{10 \rho_\alpha \rho_\beta} \int \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta} [\xi_{<p}^\beta \xi_{q>}^\beta] d\xi_\alpha \quad (\alpha \neq \beta) \quad (5.48)$$

e

$$K_{\alpha\alpha} = - \frac{kT \beta_\alpha^4}{10 \rho_\alpha^2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \int \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\beta} [\xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha] d\xi_\alpha + \int \xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha I_{\alpha\alpha} [\xi_{<p}^\alpha \xi_{q>}^\alpha] d\xi_\alpha \right\}. \quad (5.49)$$

A partir da equação (5.47) têm-se um sistema de  $\nu$  equações a  $\nu$  incógnitas que representam os tensores pressão parciais. A soma destes resulta no tensor pressão da mistura.

Para um gás completamente ionizado,  $\alpha = I$  e  $\alpha = E$ , a equação (5.47) pode ser desdobrada em:

$$2 \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} + \frac{e_E}{m_E} \frac{1}{n_E kT} (\epsilon_{riq} B_q p_{<rj>}^E + \epsilon_{rjq} B_q p_{<ri>}^E) = -K_{EE} p_{<ij>}^E - K_{EI} p_{<ij>}^I \quad (5.50)$$

e

$$2 \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} + \frac{e_I}{m_I} \frac{1}{n_I kT} (\epsilon_{riq} B_q p_{<rj>}^I + \epsilon_{rjq} B_q p_{<ri>}^I) = -K_{IE} p_{<ij>}^E - K_{II} p_{<ij>}^I. \quad (5.51)$$

Levando em consideração que a massa do elétron é muito menor que a massa do íon, pode-se simplificar o sistema pois os termos que contêm  $K_{EI} = K_{IE}$  podem ser considerados pequenos em comparação com os demais. Isto pode ser observado no apêndice A, onde são calculadas as integrais  $K_{\alpha\beta}$ . Sendo assim, as equações (5.50) e (5.51) podem ser escritas como:

$$\left[ \frac{e_E}{m_E} \frac{1}{n_E k T} (\epsilon_{riq} B_q \delta_{jp} + \epsilon_{rjq} B_q \delta_{ip}) + K_{EE} \delta_{ir} \delta_{jp} \right] p_{<rp>}^E = 2 \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}, \quad (5.52)$$

e

$$\left[ \frac{e_I}{m_I} \frac{1}{n_I k T} (\epsilon_{riq} B_q \delta_{jp} + \epsilon_{rjq} B_q \delta_{ip}) + K_{II} \delta_{ir} \delta_{jp} \right] p_{<rp>}^I = 2 \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}}. \quad (5.53)$$

Desta forma o problema passa a ser a inversão dos tensores de quarta ordem ( $A_{ijpr}$ ) que multiplicam  $p_{<rp>}^E$  e  $p_{<rp>}^I$ , nas equações acima, para que estes possam ser explicitados.

Assim resolve-se as equações (5.52) e (5.53) para os tensores pressão parciais, o que leva a:

$$p_{<kl>}^\alpha = -2\eta_{<ij> <kl>}^\alpha \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{j>}} \quad (\alpha = E, I), \quad (5.54)$$

sendo  $\eta_{<ij> <kl>}^\alpha$  dado pela equação (vide apêndice C):

$$\begin{aligned} \eta_{<ij> <kl>}^\alpha = & \frac{1}{4(b_\alpha^2 + 2a_\alpha^2 B^2)} \left\{ b_\alpha \left( \delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \right. \\ & + a_\alpha \left( \epsilon_{liq} B_q \delta_{jk} + \epsilon_{lj q} B_q \delta_{ik} + \epsilon_{k i q} B_q \delta_{jl} + \epsilon_{k j q} B_q \delta_{il} \right) \\ & - \frac{3a_\alpha b_\alpha}{(b_\alpha^2 - a_\alpha^2 B^2)} \left( \delta_{ik} B_j B_l + \delta_{il} B_j B_k + \delta_{jk} B_i B_l + \delta_{jl} B_i B_k \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \delta_{kl} B_i B_j - \frac{4}{3} \delta_{ij} B_k B_l + \frac{4}{9} B^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \\ & + \frac{3a_\alpha^2}{(b_\alpha^2 - a_\alpha^2 B^2)} \left( \epsilon_{ikq} B_q B_j B_l + \epsilon_{ilq} B_q B_j B_k + \epsilon_{jkq} B_q B_i B_l + \epsilon_{jlq} B_q B_i B_k \right) \\ & \left. + \frac{3a_\alpha^2}{4b_\alpha (b_\alpha^2 - a_\alpha^2 B^2)} \left( B_i B_j B_k B_l - \frac{1}{3} B^2 B_i B_j \delta_{kl} - \frac{1}{3} B^2 B_k B_l \delta_{ij} + \frac{1}{9} B^4 \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \right\}. \quad (5.55) \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $a_\alpha$  e  $b_\alpha$  valem:

$$a_\alpha = \frac{1}{2} \frac{e_a}{m_\alpha} \frac{1}{n_\alpha k T}, \quad b_\alpha = \frac{K_{\alpha\alpha}}{2} \quad (5.56)$$

Em uma teoria linearizada, o deviante do tensor pressão da mistura pode ser representado por  $p_{<ij>} = p_{<ij>}^I + p_{<ij>}^E$  que pode ser obtido a partir da soma da equação (5.54) resultando na lei de Navier-Stokes:

$$p_{<kl>} = -2\eta_{<ij> <kl>} \frac{\partial v_{<i}}{\partial x_{<j>}}, \quad (5.56)$$

onde

$$\eta_{<ij> <kl>} = \eta_{<ij> <kl>}^I + \eta_{<ij> <kl>}^E$$

corresponde ao *tensor de viscosidade cisalhante da mistura*.

## 6 CONCLUSÃO

As equações constitutivas para uma mistura de gases monoatômicos neutros são obtidas a partir da equação de Boltzmann através do método alternativo, considerando uma teoria linearizada. Estas equações estão determinados em (4.1.25), (4.1.43) e (4.1.46), que representam a lei de Navier-Stokes, a lei de Fick generalizada e a lei de Fourier generalizada, respectivamente. Nas leis de Fick e Fourier, são obtidos os termos cruzados associados a termo-difusão e a difusão-térmica. É possível ainda verificar as relações de Onsager (4.1.49) e (4.1.50). Na seção (4.2) o método alternativo é generalizado considerando aproximações sucessivas para os coeficientes de transporte.

Ao ser aplicado a um gás completamente ionizado (onde são considerados dois constituintes, íons e elétrons) o método alternativo possibilita a obtenção das leis de Ohm (5.39), Fourier (5.41) e Navier-Stokes (5.54), juntamente com os coeficientes de transporte associados. As relações de Onsager em presença de campos externos são dadas por (5.45) e (5.46).



## APÊNDICE A

### Cálculo das integrais $A_{\alpha\beta}$ , $F_{\alpha\beta}$ , $H_{\alpha\beta}$ e $K_{\alpha\beta}$ .

Para o cálculo das integrais dadas pelas equações (4.1.28) a (4.1.31), (4.1.33) a (4.1.36), (5.42) e (5.43) é preciso considerar a equação (4.1.13) juntamente com a seguinte mudança de variáveis:

$$\mathbf{g}^{\beta\alpha} = \xi_\beta - \xi_\alpha \quad (A.1)$$

e

$$\mathbf{G}^{\beta\alpha} = \frac{m_\alpha \xi_\alpha + m_\beta \xi_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \quad (A.2)$$

de tal forma que as velocidades peculiares podem ser escritas desta forma:

$$\xi_\alpha = \mathbf{G}^{\beta\alpha} - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{g}^{\beta\alpha} \quad (A.3)$$

e

$$\xi_\beta = \mathbf{G}^{\beta\alpha} + \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{g}^{\beta\alpha}. \quad (A.4)$$

Estas mudanças de variáveis implicarão em integrais que para serem resolvidas precisarão também dos seguintes resultados [14] que levam em conta o fato de que o ângulo formado entre  $\mathbf{g}^{\beta\alpha}$  e  $\mathbf{g}^{\beta\alpha'}$  é  $\chi_{\beta\alpha}$ , além do parâmetro de impacto  $\epsilon$  (figura 3):

$$\int g_i^{\beta\alpha'} d\epsilon = 2\pi g_i^{\beta\alpha} \cos \chi_{\beta\alpha} \quad (A.5)$$

e

$$\int g_i^{\beta\alpha'} g_j^{\beta\alpha'} d\epsilon = \pi g_{\beta\alpha}^2 \sin^2 \chi_{\beta\alpha} \delta_{ij} + \pi (3 \cos^2 \chi_{\beta\alpha} - 1) g_i^{\beta\alpha} g_j^{\beta\alpha}. \quad (A.6)$$

Tomando como exemplo a integral (4.1.28) para  $A_{\alpha\beta}$ , considerando as equações (4.1.13) e (4.1.9), esta resulta em:

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} \frac{1}{kT} \int \xi_k^\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{m_\beta}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\alpha \xi_\alpha^2}{2kT}} e^{-\frac{m_\beta \xi_\beta^2}{2kT}}, \quad (A.7)$$

que com a mudança de variáveis proposta nas equações (A.3) e (A.4) fica:

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} \frac{1}{(kT)^4} \frac{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} \int \left( G_k^{\beta\alpha} - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} g_k^{\beta\alpha} \right) e^{-\frac{(m_\alpha + m_\beta)}{2kT} G_{\beta\alpha}^2} \\ \times e^{-\left(\frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \frac{1}{2kT}\right) g_{\beta\alpha}^2} \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \left( g_k^{\beta\alpha'} - g_k^{\beta\alpha} \right) g^{\beta\alpha} b db d\epsilon d\mathbf{g}^{\beta\alpha} d\mathbf{G}^{\beta\alpha}. \quad (\text{A.8})$$

Neste ponto é necessária a equação (A.5) e a (A.8) implica em:

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{16}{3} \frac{(2\pi kT)^{\frac{1}{2}}}{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{1}{2}} (m_\alpha + m_\beta)^{\frac{1}{2}}} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)}, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(l,r)} = \int (1 - \cos^l \chi_{\beta\alpha}) \gamma_{\beta\alpha}^{2r+3} e^{-\gamma_{\beta\alpha}^2} b db d\gamma_{\beta\alpha} \quad (\text{A.10})$$

e

$$\gamma_{\beta\alpha}^2 = \frac{m_\alpha m_\beta}{2kT(m_\alpha + m_\beta)} g_{\beta\alpha}^2. \quad (\text{A.11})$$

Na equação (A.10), o ângulo de espalhamento  $\chi_{\beta\alpha}$  depende do potencial de interação molecular.

Da mesma forma que para  $F_{\alpha\beta}$  o cálculo das outras integrais pode ser efetuado resultando em:

$$A_{\alpha\alpha} = \frac{16}{3} \frac{(\pi kT)^{\frac{1}{2}}}{m_\alpha^{\frac{3}{2}}} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \left( \frac{2m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{n_\beta}{n_\alpha} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} + \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} \right\}, \quad (\text{A.12})$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{16}{3} \frac{(2\pi kT)^{\frac{1}{2}}}{(m_\alpha + m_\beta)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{m_\alpha}{m_\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)} - \frac{5}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} \right], \quad (\text{A.13})$$

$$F_{\alpha\beta} = -\frac{8}{3} \frac{(\pi kT)^{\frac{1}{2}}}{m_\alpha^{\frac{3}{2}}} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{n_\beta}{n_\alpha} \left( \frac{2m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)} - \frac{5}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} \right] + \left[ \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,2)} - \frac{2}{5} \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} \right] \right\}, \quad (\text{A.14})$$

$$H_{\alpha\beta} = -\frac{32}{15} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \frac{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{3}{2}}}{(m_\alpha + m_\beta)^{\frac{5}{2}}} \left[ \frac{55}{4} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} - 5 \Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)} + \Omega_{\alpha\beta}^{(1,3)} - 2 \Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)} \right], \quad (\text{A.15})$$

$$H_{\alpha\alpha} = \frac{32}{15} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{n_\beta}{n_\alpha} \frac{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{3}{2}}}{(m_\alpha + m_\beta)^{\frac{5}{2}}} \left\{ \left( \left( \frac{5}{2} \frac{m_\beta}{m_\alpha} \right)^2 + \frac{15}{2} \right) \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} - 5 \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha} \right)^2 \Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)} \right. \right.$$

$$+ \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha} \right)^2 \Omega_{\alpha\beta}^{(1,3)} + 2 \frac{m_\alpha}{m_\beta} \Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)} \Big\} + m_\alpha^{\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{1}{2}}}{8} \left\{ \frac{55}{4} \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} - 5 \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,2)} + \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,3)} + 2 \Omega_{\alpha\alpha}^{(2,2)} \right\} \Big\}, \quad (A.16)$$

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{16}{15} \left( \frac{2\pi}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{1}{2}}}{(m_\alpha + m_\beta)^{\frac{3}{2}}} \left[ 10 \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} - 3 \Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)} \right], \quad (A.17)$$

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{16}{15} \left( \frac{2\pi}{kT} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\nu} \frac{n_\beta}{n_\alpha} \frac{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{1}{2}}}{(m_\alpha + m_\beta)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 3 \left( \frac{m_\beta}{m_\alpha} \right)^2 \Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)} + 10 \frac{m_\beta}{m_\alpha} \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} \right\} \right. \\ \left. + \frac{2^{\frac{1}{2}}}{4} \frac{1}{m_\alpha^{\frac{1}{2}}} \left[ 3 \Omega_{\alpha\alpha}^{(2,2)} + 10 \Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} \right] \right\}. \quad (A.18)$$

Desta forma é possível considerar estas integrais quando existirem dois constituintes ( $\alpha = I, E$ ), conforme acontece no capítulo 5. Assim, se a massa de um constituinte (naquele caso  $m_E$ ) for muito menor que a do outro ( $m_I$ ), pelas equações acima conclui-se que  $F_{EI}$ ,  $F_{IE}$ ,  $H_{EI}$ ,  $H_{IE}$ ,  $K_{EI}$  e  $K_{IE}$  são muito pequenas em comparação com o valor assumido pelas outras integrais associadas à mistura estudada.

## APÊNDICE B

### Cálculo do tensor inverso $(S^{-1})_{ij}$

O teorema de Cayley-Hamilton [15] para um tensor de segunda ordem  $\mathbf{S}$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{S}^3 - I\mathbf{S}^2 + IIS - III\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (B.1)$$

onde

$$\begin{aligned} I &= S_{ii}, \\ II &= \frac{1}{2} \left[ (S_{ii})^2 - (\mathbf{S}^2)_{ii} \right], \\ III &= \frac{1}{3} (\mathbf{S}^3)_{ii} - \frac{1}{2} S_{ii} (\mathbf{S}^2)_{jj} + \frac{1}{6} (S_{ii})^3 \end{aligned} \quad (B.2)$$

e  $\mathbf{1}$  é o tensor unitário.

Sendo  $S_{ij}$  dado por:

$$S_{ij} = a\delta_{ij} + b\epsilon_{ijk}B_k + cB_iB_j, \quad (B.3)$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes, pode-se multiplicar a equação (B.1) por  $\mathbf{S}^{-1}$  e resolvê-la para este tensor inverso o que conduz a:

$$(S^{-1})_{ij} = \frac{1}{III} \left[ a(a + cB^2) \delta_{ij} - b(a + cB^2) \epsilon_{ijk}B_k + (b^2 - ac) B_iB_j \right], \quad (B.4)$$

onde

$$III = (a^2 + b^2B^2) (a + cB^2). \quad (B.5)$$

## APÊNDICE C

### Cálculo do tensor inverso $A_{ijpr}$

No capítulo 5, equações (5.52) e (5.53) é preciso inverter um tensor de quarta ordem,  $A_{ijpr}$ , para que seja possível obter o deviante do tensor pressão parcial. Este tensor que deve ser sem traço em  $ij$  e  $pr$ , sendo válidas as relações  $A_{ijpr} = A_{ijrp}$  e  $A_{ijpr} = A_{jipr}$ , pode ser expresso usando teoremas de representação de funções tensoriais [16] como:

$$A_{<ij><pr>} = a(\epsilon_{riq}B_q\delta_{jp} + \epsilon_{rjq}B_q\delta_{ip} + \epsilon_{piq}B_q\delta_{jr} + \epsilon_{pj q}B_q\delta_{ir}) \\ + b\left(\delta_{ip}\delta_{jr} + \delta_{ir}\delta_{jp} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{rp}\right). \quad (C.1)$$

Ainda considerando teoremas de representação de funções tensoriais e levando em conta que

$$(A^{-1})_{<ij><pr>} A_{<ij><pr>} = \frac{1}{2} \left( \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{mn} \right), \quad (C.2)$$

onde o lado direito representa a matriz identidade para o tensor  $A_{<ij><kl>}$ , encontra-se:

$$(A^{-1})_{<ij><kl>} = \frac{1}{4(b^2 + 4a^2B^2)} \left\{ b \left( \delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) \right. \\ + a \left( \epsilon_{liq}B_q\delta_{jk} + \epsilon_{lj q}B_q\delta_{ik} + \epsilon_{k iq}B_q\delta_{jl} + \epsilon_{kj q}B_q\delta_{il} \right) \\ + \frac{3ab}{(b^2 + a^2B^2)} \left( \delta_{ik}B_jB_l + \delta_{il}B_jB_k + \delta_{jk}B_iB_l + \delta_{jl}B_iB_k \right. \\ \left. - \frac{4}{3}\delta_{kl}B_iB_j - \frac{4}{3}\delta_{ij}B_kB_l + \frac{4}{9}B^2\delta_{ij}\delta_{kl} \right) \\ + \frac{3a^3}{(b^2 + a^2B^2)} \left( \epsilon_{ikq}B_qB_jB_l + \epsilon_{ilq}B_qB_jB_k + \epsilon_{jkq}B_qB_iB_l + \epsilon_{jlq}B_qB_iB_k \right) \\ \left. + \frac{12a^4}{b(b^2 + a^2B^2)} \left( B_iB_jB_kB_l - \frac{1}{3}B^2B_iB_j\delta_{kl} - \frac{1}{3}B^2B_kB_l\delta_{ij} + \frac{1}{9}B^4\delta_{ij}\delta_{kl} \right) \right\}, \quad (C.3)$$

que é a matriz inversa procurada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Chapman, S. and Cowling, T.G., *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*; Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [2] Grad, H., *On the Kinetic Theory of Rarefied Gases*; Commun. Pure Appl. Math., 2 (1949), 331-407.
- [3] Reinecke, S. and Kremer, G.M., *Method of Moments of Grad*; Phys. Rev. A, 42 (1990), 815-820.
- [4] Reinecke, S. and Kremer, G.M., *A Generalization of the Chapman-Enskog and Grad Methods*; Continuum Mech. Thermodyn., 3 (1991), 155-167.
- [5] Bezerra Jr., A.G.; Reinecke, S.; Kremer, G.M., *A Combined Chapman-Enskog and Grad Method I. Monoatomic Gases and Mixtures*; Submetido para publicação .
- [6] Muller, I. *Thermodynamics*; Pitman, London, 1985.
- [7] Bhatnagar, P.L.; Gross, E.P.; Krook, M., *A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems*; Phys. Rev. 94 (1954), 511-525.
- [8] Garzó, V.; Santos, A.; Brey, J.J., *A Kinetic Model for a Multicomponent Gas*; Phys. Fluids A, 1 (1989), 380-383.
- [9] Ikenberry, E. and Truesdell, C., *On the pressures and the Flux of Energy in a Gas According to Maxwell's Kinetic Theory I*; J. Rational Mech. Anal. 5 (1956), 1-54.

- [10] Hirschfelder, J.O.; Curtiss, C.F.; Bird, R.B., *Molecular Theory of Gases and Liquids*; John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.
- [11] de Groot, S.R. and Mazur, P., *Non Equilibrium Thermodynamics*; Dover Publications, Inc., New York, 1984.
- [12] Balescu, R., *Transport Processes in Plasmas*; North- Holland, New York, 1988.
- [13] Bittencourt, J.A., *Fundamentals of Plasma Physics*; Pergamon Press, 1986.
- [14] Kremer, G.M., *Notas de aula sobre teoria cinética dos gases*.
- [15] Hoffman, K. and Kunze, R., *Linear Algebra*; Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1971.
- [16] Smith, G.F., *On Isotropic Functions of Symmetry Tensors, Skew Symmetric Tensors and Vectors*; Int. J. Engng Sci, 9 (1971) 899-916.